Überraschende Wahrscheinlichkeiten

Alice und Bob werfen mehrmals hintereinander eine faire Münze mit der Aufschrift 0 und 1. Alice zählt ihre Würfe. Auch Bob zählt seine Würfe.
Wenn bei Alice eine 1 auf eine 0 folgt oder bei Bob eine 0 auf eine 0, ist das Spiel beendet.
Wie oft muss die Münze im Mittel geworfen werden, damit einer von beiden gewinnt?

Aufgabe „Münzen werfen“ aus dem Band Stochastik, Lambacher-Schweizer, Klett-Verlag

Lösung

Gesucht sind die Erwartungswerte E_{00} und E_{01} für die Anzahl der Würfe bis bei Alice die Serie „01“ und bei Bob die Serie „00“ eintritt.
Die Aufgabe kann mit Hilfe von Markow-Ketten gelöst werden. S charakterisiert den Anfangszustand „Start“, Z_0 den Zustand nachdem eine „0“ geworfen wurde und Z_{00} / Z_{01} die Endzustände.
Zur Veranschaulichung dienen die Diagramme:

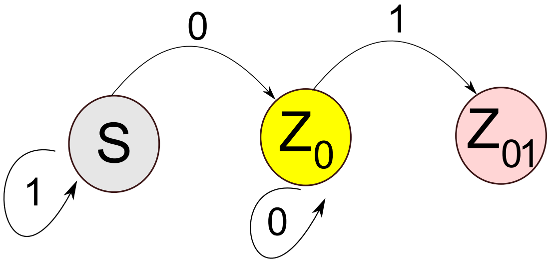

Abbildung 1: Übergänge für Alice

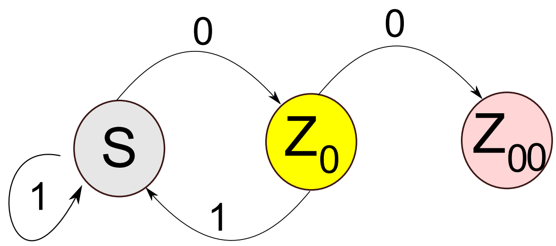

Abbildung 2: Übergänge für Bob

Der Vorteil von Alice ist, dass sie in dem Zustand Z_0 verweilen kann und es unmöglich ist, wieder in den Zustand S zurückzufallen. Das Spiel ist dann beim Fallen einer „1“ beendet.
Bob hingegen kann vom Zustand Z_0 beim Werfen einer „1“ wieder nach S zurückfallen. Man kann jetzt schon an Hand der Diagramme feststellen, dass Bob mehr Versuche braucht als Alice.
Für jeden Pfeil beträgt die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$. Die Übergangstabellen sind dann

	S	Z_0	Z_{01}
S	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Z_0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Z_{01}	0	0	1

	S	Z_0	Z_{00}
S	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Z_0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
Z_{01}	0	0	1

Es ist zu berechnen, wie viele Würfe benötigt werden, um vom Zustand S in den Zustand Z_0 bzw. vom Zustand Z_0 in den Zustand Z_{01}/Z_{00} zu kommen. Dazu wird jeweils 1 Wurf benötigt.

Das bedeutet für Alice von S nach Z_{01}:
$S = \frac{1}{2} \cdot (S + 1) + \frac{1}{2} \cdot (Z_0 + 1)$ ...(1),
$Z_0 = \frac{1}{2} \cdot (Z_0 + 1) + \frac{1}{2} \cdot (Z_{01} + 1)$ ...(2).

Das bedeutet für Bob von S nach Z_{00}:
$S = \frac{1}{2} \cdot (S + 1) + \frac{1}{2} \cdot (Z_0 + 1)$ ...(1),
$Z_0 = \frac{1}{2} \cdot (S + 1) + \frac{1}{2} \cdot (Z_{00} + 1)$ ...(2).

Die Zustände Z_{01} und Z_{00} sind absorbierend, da das Spiel in diesen Zuständen endet. Der Erwartungswert ist hier 0. Daraus entsteht jeweils in (2):

Alice:
$\frac{1}{2} \cdot Z_0 = 1.$ $\quad Z_0 = 2,$
Das Einsetzen von Z_0 in (1) liefert
$\frac{1}{2} \cdot S = \frac{1}{2} + \frac{3}{2},$
$S = 4.$
Von S in Z_0 : 2 Würfe
von Z_0 in Z_{01}: 2 Würfe

Bob:
$Z_0 = \frac{1}{2} \cdot S + 1.$
$\frac{1}{2} \cdot S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot S + 1,$
$S = 6.$
Von S in Z_0 : 4 Würfe
von Z_0 in Z_{00}: 2 Würfe

Alice braucht im Mittel 4 Würfe für die Serie „01“, Bob benötigt 6 Würfe für die Serie „00“.