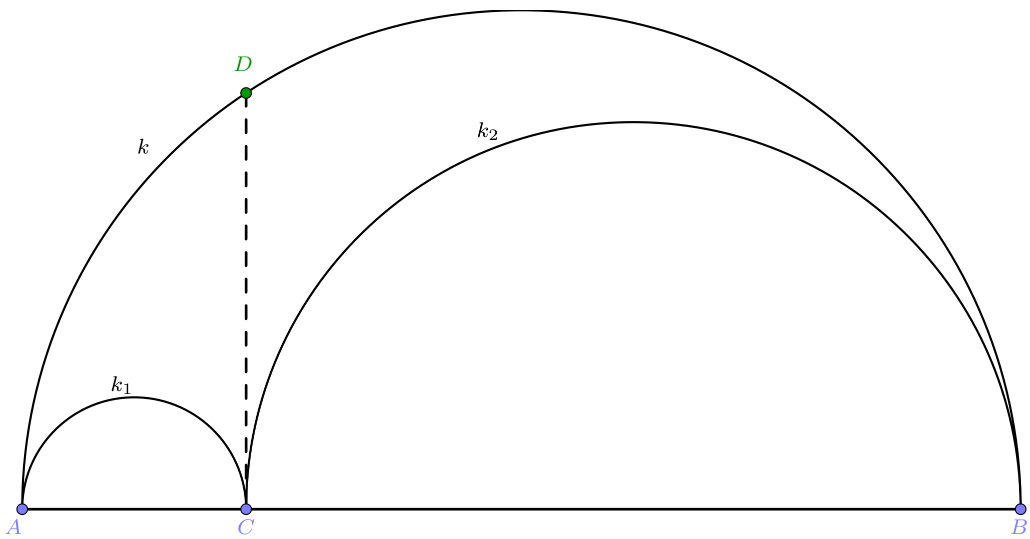
Der Arbelos von Archimedes

Die Strecke $\overline{AB}$ wird durch den Punkt C in zwei ungleiche Teile geteilt. Die Halbkreise k, k_1, k_2 mit den Radien r, r_1, r_2 über $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ begrenzen eine Fläche zwischen den Halbkreisen, die Archimedes Arbelos (Schustermesser) nennt. Zeichnet man in C die Normale zur Strecke $\overline{AB}$, schneidet diese den Kreis k im Punkt D.

a) Es ist zu zeigen, dass die Fläche des Arbelos genauso groß ist, wie die Fläche des Kreises mit dem Durchmesser $\overline{CD}$.

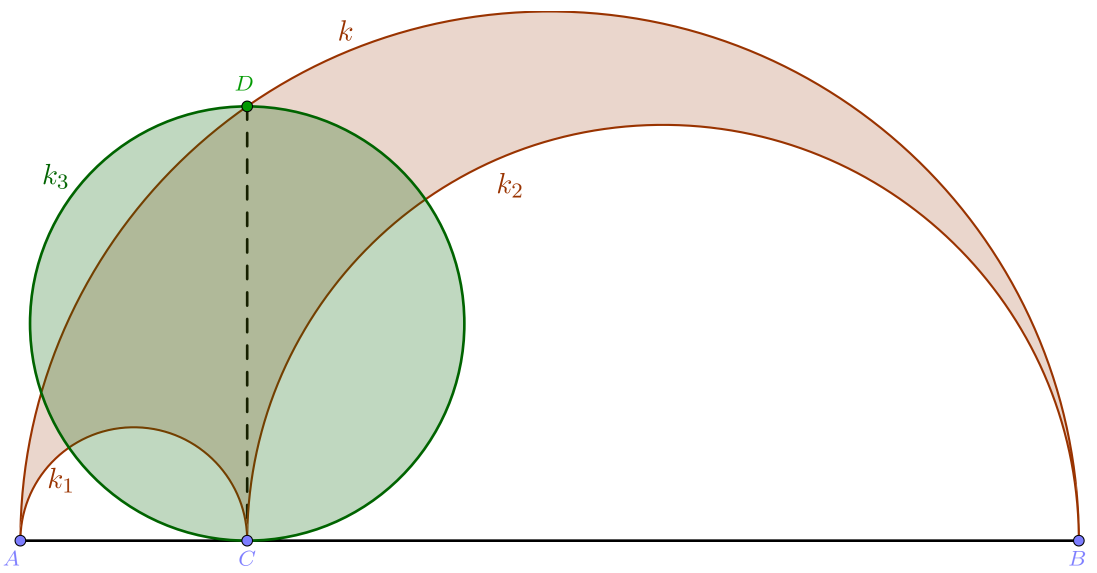
b) Die Strecke $\overline{CD}$ teilt den Arbelos in zwei Teile.
Es ist zu zeigen, dass die Kreise, die man diesen beiden Teilen einschreiben kann, gleich groß sind.



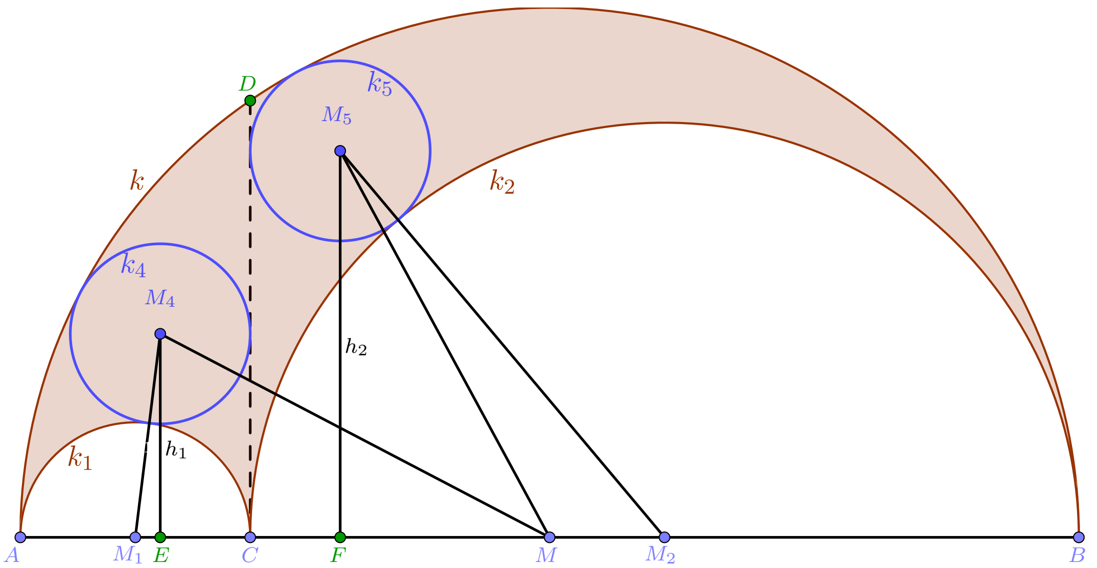
Aufgabe von Jutta Gut, Wien, 23.Juni 2006

Lösung

a) Die Fläche A_A des Arbelos kann berechnet werden mit $A_A = \frac{\pi}{2} \cdot \left(r^2 - r_1^2 - r_2^2\right)$, ...(1).
Durch Quadrieren von $r = r_1 + r_2$ entsteht $r^2 = r_1^2 + 2 \cdot r_1 \cdot r_2 + r_2^2$ ...(2),
(2) in (1) $\underline{\underline{A_A = \pi \cdot r_1 \cdot r_2}}$ ...(3).
Der Arbelos hat einen Flächeninhalt von $A_A = \pi \cdot r_1 \cdot r_2$.
Die Halbkreisgleichung von k lautet $y = \sqrt{r^2 - (x-r)^2}$,
vereinfacht $y = \sqrt{2 \cdot r \cdot x - x^2}$ ...(4).
Der Punkt C hat das Argument $x = 2 \cdot r_1$, so dass $y = \sqrt{2 \cdot r \cdot 2 \cdot r_1 - (2 \cdot r_1)^2}$,
bzw. $y = 2 \cdot \sqrt{r \cdot r_1 - r_1^2}$ ...(5).
Wenn y der Durchmesser von einem Kreis k_3 mit dem Durchmesser $d = \overline{CD}$ sein soll, dann beträgt der Flächeninhalt A_{k_3} $A_{k_3} = \frac{\pi}{4} \cdot y^2$,
mit (5) $A_{k_3} = \frac{\pi}{4} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{r \cdot r_1 - r_1^2}\right)^2$,
$A_{k_3} = \pi \cdot \left(r \cdot r_1 - r_1^2\right)$,
$r = r_1 + r_2$ $A_{k_3} = \pi \cdot \left((r_1 + r_2) \cdot r_1 - r_1^2\right)$,
$A_{k_3} = \pi \cdot \left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 - r_1^2\right)$,
$\underline{\underline{A_{k_3} = \pi \cdot r_1 \cdot r_2}}$, w.z.b.w.
Der Kreis k_3 und der Arbelos haben den gleichen Flächeninhalt.



b)



Die Kreise k_4 und k_5 haben die Radien r_4 und r_5.

Im Dreieck ΔM_1EM_4 ist	$(r_1+r_4)^2=(r_1-r_4)^2+h_1^2$,	$h_1^2=4\cdot r_1r_4$	...(6).
Im Dreieck ΔEMM_4 ist	$(r-r_4)^2=(r-2\cdot r_1+r_4)^2+h_1^2$,	$h_1^2=4\cdot\left(r_1r_4+rr_1-r_1^2-rr_4\right)$	...(7).
(6)=(7)	$4\cdot r_1r_4=4\cdot\left(r_1r_4+rr_1-r_1^2-rr_4\right)$,	$\underline{\underline{r_4=r_1-\frac{r_1^2}{r}}}$.	
Im Dreieck ΔFM_2M_5 ist	$(r_2+r_5)^2=(r_2-r_5)^2+h_2^2$,	$h_2^2=4\cdot r_2r_5$	...(8).
Im Dreieck ΔFMM_5 ist	$(r-r_5)^2=(r-2\cdot r_1-r_5)^2+h_2^2$,	$h_2^2=4\cdot\left(rr_1-r_1r_5-r_1^2\right)$	...(9).
(8)=(9)	$4\cdot r_2r_5=4\cdot\left(rr_1-r_1r_5-r_1^2\right)$,	$r_2r_5+r_1r_5=r_1\cdot(r-r_1)$,	
	$r_5=\frac{r_1\cdot(r-r_1)}{r_1+r_2}$,		
$r_2=r-r_1$	$r_5=\frac{r_1\cdot(r-r_1)}{r}$,	$\underline{\underline{r_5=r_1-\frac{r_1^2}{r}}}$ w.z.b.w.	

Die Radien von r_4 und r_5 sind gleich groß.