Modell von A. Grieser

Lösung und Gewinner der Weihnachtsaufgabe 2021

1 Aufgabenstellung
Mit Würfeln der Kantenlänge a soll gem. Bild eine zweifeldrige, symmetrische Brücke mit den Stützweiten $2 \times 6a$ konstruiert werden.

In Systemmitte ist eine Stütze angeordnet, die aus einzelnen übereinanderliegenden Würfeln besteht.

Die lichte Höhe unter den Firstpunkten muss mindestens $4a$ betragen.

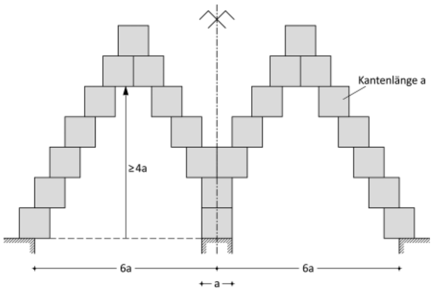
Die Würfel sind so anzuordnen, dass die Kontaktflächen jeweils horizontal bzw. vertikal und an den Auflagern horizontal sind.

Die Längen der Kontaktflächen dürfen $a/10$ und bei den äußeren Lagern $a/2$ nicht unterschreiten.

Die Brücke trägt nur ihre Eigenlast.

Zwischen allen Kontaktflächen herrscht der Haftreibungskoeffizient $\mu = 2/3$.

Gesucht:
- symmetrische Brückenkonstruktion mit *kleinstmöglicher* Anzahl von Würfeln und für diese Anzahl größtmöglicher lichter Höhe
- grafische Darstellung der Brücke mit genauer Angabe der Lage der Stützlinie als geometrischer Ort der resultierenden Schnittkräfte



Hinweise:
- Die im Bild dargestellte Anordnung der Würfel stellt eine Prinzipskizze dar.
- Eine gleichartige Aufgabe findet sich auf dem Cover des Buches „22 Jahre Weihnachtspreisaufgabe“ von Helmut Rubin und Daniel Rubin.

Aufgabenstellung:
Em. o. Prof. Dr. Helmut Rubin
TU Wien, Institut 202

2 Allgemeine Überlegungen zur Lösung
Die Lösung der vorliegenden Aufgabe kann hinsichtlich der Anordnung der Würfel nur durch Probieren gefunden werden. Das bedeutet, dass für eine als optimal angesehene Würfelkonstruktion danach der Nachweis der Standfestigkeit zu erbringen ist.

Hierfür müssen für die Stützlinie – als geometrischer Ort der resultierenden Schnittkraft – folgende Bedingungen erfüllt sein:

- die Stützlinie darf nirgendwo außerhalb der Kontaktflächen der Würfel liegen
- an allen Kontaktflächen muss die Stützlinie im Bereich des Reibungskegels liegen

Der Reibungskegel besteht hier im ebenen Fall aus zwei Strahlen, die mit der Flächennormalen jeweils den Winkel ρ einschließen, wobei $\tan \rho = \mu = 2/3$ gilt.

Für die Bestimmung der Stützlinie wird angenommen, dass das Gewicht G eines Würfels im Schwerpunkt konzentriert ist.

3 Lösungsprinzip
Die Aufgabe wird anschaulich auf der Basis des Seileckverfahrens gelöst.

Neben den Einzellasten G der Würfel enthält der Kraftplan die Polstrahlen, welche die in den Kontaktflächen wirkenden Kräfte implizieren. Ihre Anstiege liefern im System jeweils die Anstiege der einzelnen Abschnitte der Stützlinie zwischen zwei benachbarten Lasten G.

Generell gilt: jedem Dreieck im Kraftplan (aus einer Last G und zwei Polstrahlen) ist im System ein Knickpunkt der Stützlinie mit der zugehörigen Last G zugeordnet.

In diesem Sinne wird die vorliegende Aufgabe dadurch gelöst, dass ausschließlich die Geometrie von Krafteck und Stützlinie betrachtet wird und dass statt Gleichgewichtsbedingungen geometrische Beziehungen betrachtet und rechnerisch formuliert werden.

Alle geometrischen Größen werden exakt als rationale Zahlen dargestellt.

4 Würfelkonstruktion und Berechnung
Bild 1 zeigt die gewählte symmetrische Würfelkonstruktion, bestehend aus **20 Würfeln**. Die Anordnung der Würfel für eine richtige Lösung hat geometrisch bedingt noch einen Freiheitsgrad. Dieser wird dadurch eliminiert, dass die beiden Würfel an den äußeren Lagern jeweils genau zentrisch über der Lagerkante angeordnet werden.

Neben der Symmetrie des ganzen Systems sind bei einer Systemhälfte noch jeweils die drei Würfel im Firstbereich symmetrisch angeordnet.

Für einen gewählten Horizontalschub

$$H = \frac{7}{3} G$$

ergibt sich bereits eindeutig das Krafteck für die linke Bogenhälfte mit den Auflagerkraftkomponenten H und V_ℓ sowie auch das Krafteck für die Mittelstütze mit der Auflagerkraft V_m. Daraus lassen sich die Anstiege m_1 bis m_5 der ansteigenden Stützlinienabschnitte ablesen.

Die Wahl von H ergibt sich aus der Überlegung, dass mit dem Stützlinienabschnitt 3 gerade der größtmögliche Reibungskoeffizient $\mu = 2/3$ ausgeschöpft wird.

In Bild 2 ist der Teil mit den Würfeln 1–7, den Stützlinienabschnitten S1–S5 und mit jenen Längen dargestellt, die zur Bemaßung und Berechnung der Stützlinie erforderlich sind. Das Krafteck enthält neben den Gewichten G alle Schnittgrößen in den Kontaktflächen. Wie bereits erwähnt, beinhaltet jedes einzelne Dreieck im Krafteck das Gleichgewicht jener drei Kräfte, die am zugehörigen Knotenpunkt der Stützlinie vorhanden sind.

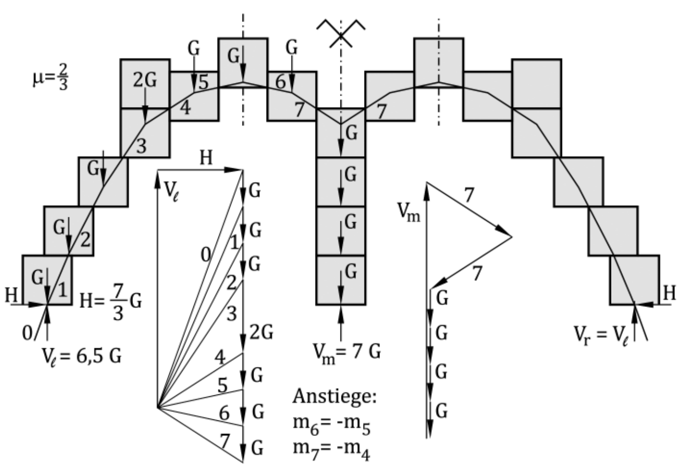


Bild 1 Anordnung der Würfel der zweifeldrigen, symmetrischen Brücke

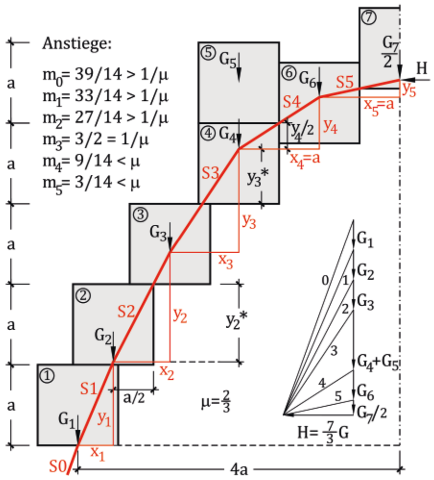


Bild 2 Geometrie der Stützlinie für Würfel 1–7

Die Anstiege m_0–m_5 geben Auskunft darüber, ob die Schnittkräfte in den Kontaktflächen im Reibungskegel liegen. Für die horizontalen Flächen muss die Bedingung

$$m_i \geq \frac{1}{\mu}$$

und für die vertikalen Flächen

$$m_i \leq \mu$$

erfüllt sein; diese Nachweise sind für alle m_i in Bild 2 angegeben.

Berechnung der Stützlinie
Für die Würfel 1, 2 gem. Bild 2 gilt:

$$y_2^* = m_2 \frac{a}{2} = \frac{27}{28} a$$

$$y_1 = 2a - y_2^* = \frac{29}{28} a$$

$$x_1 = \frac{1}{m_1} y_1 = \frac{29}{66} a$$

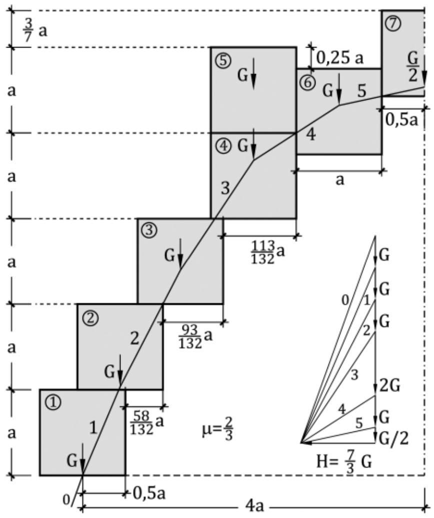


Bild 3 Geometrische Lage für Würfel 1–7

Für die Würfel 4–7 gilt:

$$x_5 = a, \quad y_5 = \frac{3}{14} a$$

$$x_4 = a, \quad y_4 = \frac{9}{14} a$$

Die restlichen Größen werden gem. Bild 2 wie folgt berechnet:

$$y_3^* = a - \frac{y_4}{2} = \frac{19}{28} a$$

$$y_2^* + a + y_3^* = \frac{37}{14} a = y_2 + y_3 = m_2 x_2 + m_3 x_3$$

Andererseits gilt:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2a$$

Mit bekanntem x_1 erhält man aus den beiden vorstehenden Gleichungen

$$x_2 = \frac{31}{44} a$$

und

$$x_3 = \frac{113}{132} a$$

Die folgende Tabelle enthält, jeweils auf gemeinsamen Nenner gebracht, die Zahlenwerte für m_i, x_i und y_i.

i	m_i	x_i	y_i
1	$\frac{33}{14}$	$\frac{58}{132} a$	$\frac{638}{616} a$
2	$\frac{27}{14}$	$\frac{93}{132} a$	$\frac{837}{616} a$
3	$\frac{21}{14}$	$\frac{113}{132} a$	$\frac{791}{616} a$
4	$\frac{9}{14}$	a	$\frac{396}{616} a$
5	$\frac{3}{14}$	a	$\frac{132}{616} a$

Kontrolle:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4\,a$$

Die lichte Höhe unter dem First beträgt:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2} y_5 = \frac{31}{7} a = 4{,}429\,a$$

Die für die Lage der Würfel maßgebenden horizontalen und vertikalen Abmessungen sind in Bild 3 angegeben; diese ergeben sich unmittelbar aus der in Bild 2 gezeigten Stützlinie.

Speziell für den Würfel 6 gilt, dass seine Lage in vertikaler Richtung in bestimmten Grenzen noch verschoben werden könnte.

Prof. Dr. Helmut Rubin, Wien

Die nächste Weihnachtsaufgabe erscheint in Heft 11 dieses Jahres.

Gewinner der Weihnachtsaufgabe

Volker Bertram
Wefensleben
Lsg. mit 24 Würfeln

Dipl.-Ing. Horst Dennulat
Leipzig
Lsg. mit 20 Würfeln

Dipl.-Ing. Robert Eder
Spittal an der Drau
Lsg. mit 20 Würfeln

Prof. Dr.-Ing. Georg Geldmacher
Frankfurt
Lsg. mit 20 Würfeln

Dipl.-Ing. Andreas Grieser
Greifswald
Lsg. mit 20 Würfeln und Modell

Dipl.-Ing. Christoph Huber
Klagenfurt
Lsg. mit 20 Würfeln

Dipl. Bauingenieur ETH Theodor Keller
Zürich
Lsg. mit 20 Würfeln

Prof. Dr.-Ing. Albert Konrad
München
Lsg. mit 20 Würfeln

DI Dr. techn. Burkhard Krenn
Stuttgart
Lsg. mit 20 Würfeln

Dr.-Ing. Helmut Kupfer
München
Lsg. mit 20 Würfeln

Dipl.-Ing. Thomas Reininger
Linz
Lsg. mit 20 Würfeln

Dr.-Ing. Ulrich Schmidt
Dresden
Lsg. mit 20 Würfeln und Modell

G. Tzellos
Griechenland
Lsg. mit 21 Würfeln

Dipl.-Ing. Till Würfel
Karlsruhe
Lsg. mit 20 Würfeln

Die Redaktion dankt für die rege Beteiligung und gratuliert allen Gewinnern.