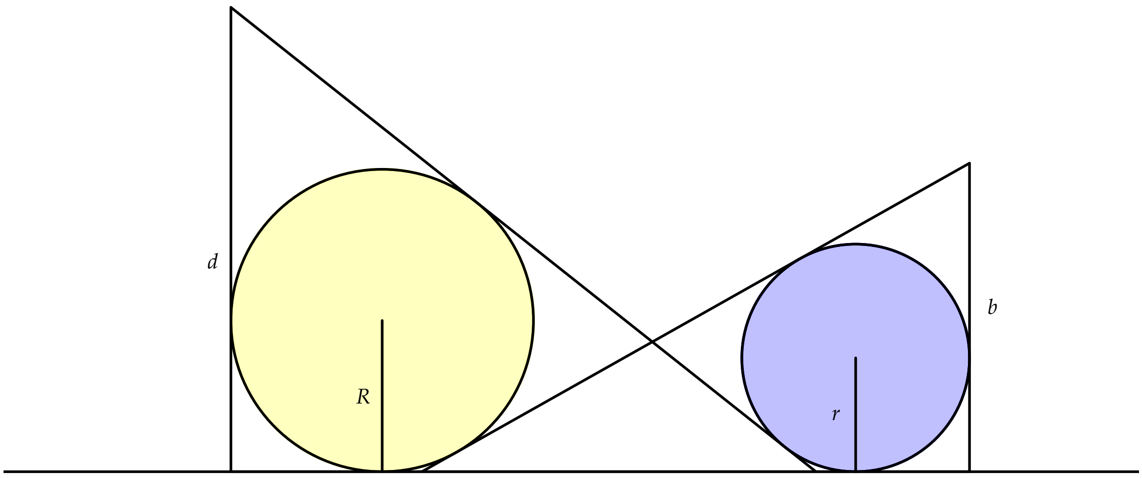
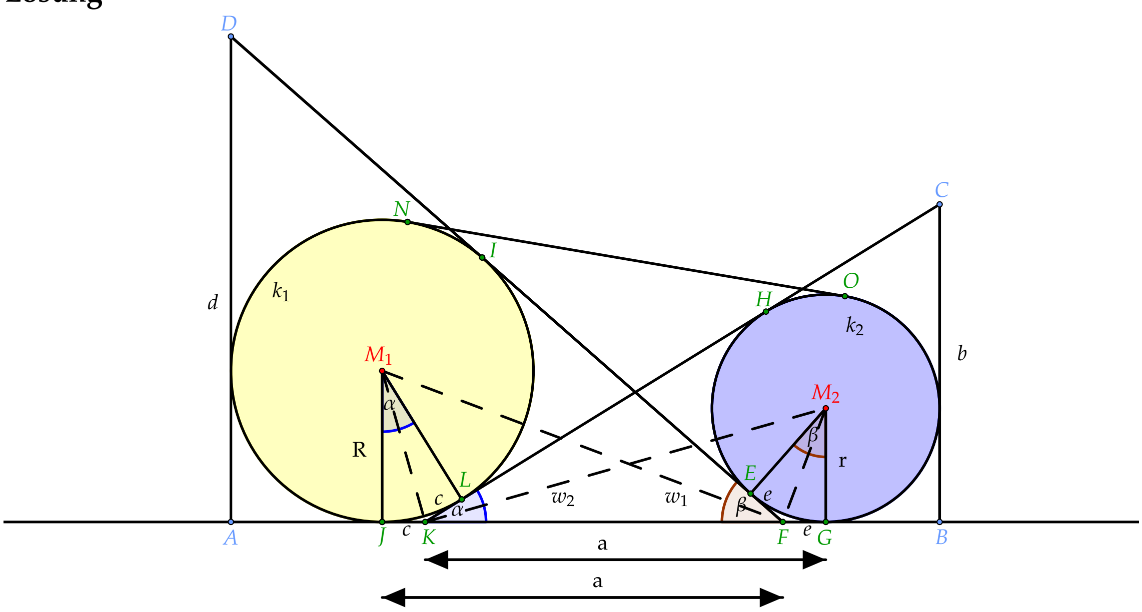
Beweis: Zwei Kreise in zwei rechtwinkligen Dreiecken

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind so positioniert, dass die Hypotenusen von jedem der beiden Kreise berührt wird. Auf einer gemeinsamen Tangente liegt jeweils eine Kathete , die anderen beiden Katheten der Dreiecke verlaufen parallel zueinander.
Es ist zu beweisen, dass der Unterschied der Kehrwerte beider paralleler Katheten der Differenz der Kehrwerte der Kreisdurchmesser beider Kreise entspricht. $\frac{1}{b} - \frac{1}{d} = \frac{1}{d_{blau}} - \frac{1}{d_{gelb}}$



Aufgabe von Prof. J. Marshall Unger, 60 neue Sangaku-Probleme von
https://u.osu.edu/unger.26/online-publications/problems-from-wasan-nau/

Lösung



Der Kreis k_1 hat den Radius R, der Kreis k_2 den Radius r. Die Winkel α und β sind jeweils zwei Mal in der Figur zu finden, da deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen.
Die Tangentenabschnitte der inneren und äußeren Tangenten sind gleich lang, $\overline{LH} = \overline{EI}$ bzw. $\overline{JG} = \overline{NO}$. Weiterhin ist $\overline{JK} = \overline{KL}$ und $\overline{EF} = \overline{FG}$, da die Dreiecke ΔM_1JK und ΔM_1KL kongruent sind, wie auch die Dreiecke ΔM_2EF und ΔM_2FG.

Es ist	$\overline{JG} - e = \overline{EI} + e,$	$\overline{JG} - \overline{EI} = 2 \cdot e$	...(1).
Weiterhin ist	$\overline{JG} - c = \overline{LH} + c,$	$\overline{JG} - \overline{LH} = 2 \cdot c$	...(2).
(1)=(2), $\overline{LH} = \overline{EI}$	$2 \cdot e = 2 \cdot c,$	$e = c$	...(3).
Im Dreieck ΔKBC ist	$\tan \alpha = \frac{b}{a+r},$		...(4).

Die Dreiecke ΔJKM_1 und ΔKGM_2 sind einander ähnlich, da durch den Mittelpunkt des Inkreises von k_2 die Winkelhalbierende w_2 verläuft.

Im Dreieck ΔKGM_2 ist $\quad tan\,\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{a}$, ...(5).

(4), (5) in $tan\,\beta = \frac{2\cdot tan\frac{\alpha}{2}}{1-\left(tan\frac{\alpha}{2}\right)^2} \qquad \frac{b}{a+r} = \frac{2\cdot\frac{r}{a}}{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2}, \qquad b = \frac{2\cdot\frac{r}{a}\cdot(a+r)}{\left(\frac{a^2-r^2}{a^2}\right)},$

$$b = \frac{2\cdot a\cdot r\cdot(a+r)}{(a+r)\cdot(a-r)}, \qquad b = \frac{2\cdot a\cdot r}{a-r} \quad ...(6).$$

Analog entsteht mit den Dreiecken ΔAFD, ΔJFM_1 $\quad d = \frac{2\cdot a\cdot R}{a-R}$ ...(7).

Mit (6) und (7) erhält man

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{d} = \frac{a-r}{2\cdot a\cdot r} - \frac{a-R}{2\cdot a\cdot R}, \qquad \frac{1}{b} - \frac{1}{d} = \frac{a\cdot R - r\cdot R - a\cdot r + r\cdot R}{2\cdot a\cdot r\cdot R},$$

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{d} = \frac{a\cdot(R-r)}{2\cdot a\cdot r\cdot R}, \qquad \frac{1}{b} - \frac{1}{d} = \frac{1}{2\cdot r} - \frac{1}{2\cdot R},$$

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{d} = \frac{1}{d_{blau}} - \frac{1}{d_{gelb}} \quad \text{w.z.b.w.}$$