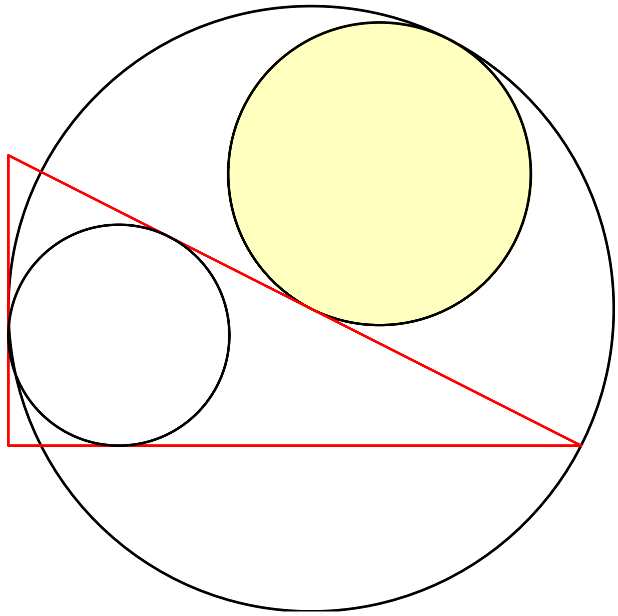
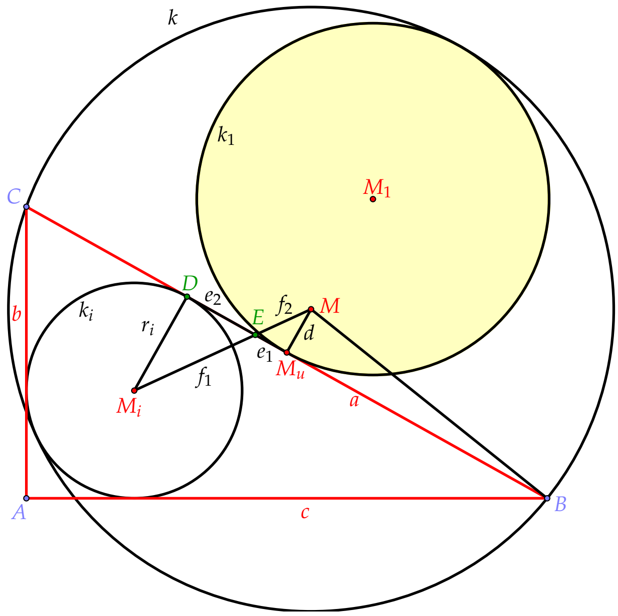
Beweis: Drei Kreise und ein rechtwinkliges Dreieck

Es ist zu beweisen, dass der Durchmesser des gelben Kreises, der den Mittelpunkt der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks berührt, ein Viertel vom Umfang des Dreiecks ist.



Aufgabe von Prof. J. Marshall Unger, 60 neue Sangaku-Probleme von
https://u.osu.edu/unger.26/online-publications/problems-from-wasan-nau/

Lösung



Der Kreis k hat den Radius R, der Kreis k_1 den Radius r und der Inkreis k_i den Radius r_i. Der Punkt M_u ist der Umkreismittelpunkt der Hypotenuse a, die Katheten sind b und c. Die Dreiecke ΔEM_uM und ΔM_iED sind einander ähnlich. Der Inkreisradius r_i eines rechtwinkligen Dreiecks kann bestimmt werden mit der Gleichung $r_i = \frac{b+c-a}{2}$ oder $r_i = \frac{b \cdot c}{a+b+c}$.

Es ist $d = 2 \cdot r - R$ ...(1).

Im Dreieck $\Delta M_u BM$ ist $d^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ...(2).

Es ist $f_1 + f_2 = R - r_i,$ ...(3)

$e_1 + e_2 = \frac{a}{2} - (b - r_i),$ $\quad e_1 + e_2 = \frac{a}{2} - b + r_i,$ ...(4)

$f_1 \cdot d = f_2 \cdot r_i,$ ...(5)

$e_1 \cdot r_i = e_2 \cdot d,$ ...(6).

Aus (3) und (5) entsteht $f_1 + \frac{f_1 \cdot d}{r_i} = R - r_i,$ $\quad f_1 = \frac{r_i \cdot (R - r_i)}{r_i + d}$ ...(7).

Aus (4) und (6) entsteht $\frac{e_2 \cdot d}{r_i} + e_2 = \frac{a}{2} - b + r_i,$ $\quad e_2 = \frac{r_i \cdot \left(\frac{a}{2} - b + r_i\right)}{r_i + d}$ ...(8).

Im Dreieck $\Delta M_i ED$ ist $r_i^2 = f_1^2 - e_2^2,$

mit (7), (8) $\quad r_i^2 = \left(\frac{r_i \cdot (R - r_i)}{r_i + d}\right)^2 - \left(\frac{r_i \cdot \left(\frac{a}{2} - b + r_i\right)}{r_i + d}\right)^2,$

$: r_i^2$ $\quad (r_i + d)^2 = (R - r_i)^2 - \left(\frac{a}{2} - b + r_i\right)^2,$

$2 \cdot r_i \cdot d + d^2 = R^2 - 2 \cdot R \cdot r_i - \left(\frac{a}{2} - b + r_i\right)^2,$

mit (2) $\quad 2 \cdot r_i \cdot d + R^2 - \frac{a^2}{4} = R^2 - 2 \cdot R \cdot r_i + a \cdot b + 2 \cdot b \cdot r_i - a \cdot r_i - \frac{a^2}{4} - b^2 - r_i^2,$

mit (1) $\quad 4 \cdot r_i \cdot r - 2 \cdot R \cdot r_i = -2 \cdot R \cdot r_i + a \cdot b + 2 \cdot b \cdot r_i - a \cdot r_i - b^2 - r_i^2,$

ordnen $\quad 4 \cdot r_i \cdot r = a \cdot b - b^2 + r_i \cdot (2 \cdot b - a - r_i),$

$r_i = \frac{b+c-a}{2}$ $\quad 4 \cdot r_i \cdot r = a \cdot b - b^2 + \frac{b+c-a}{2} \cdot \left(2 \cdot b - a - \frac{b+c-a}{2}\right),$

$4 \cdot r_i \cdot r = a \cdot b - b^2 + b^2 + b \cdot c - a \cdot b - \frac{a \cdot b}{2} - \frac{a \cdot c}{2} + \frac{a^2}{2} - \left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2,$

$4 \cdot r_i \cdot r = b \cdot c - \frac{a \cdot b}{2} - \frac{a \cdot c}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot c}{2} - \frac{b \cdot c}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{4},$

$4 \cdot r_i \cdot r = \frac{b \cdot c}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4} \cdot \left(b^2 + c^2\right),$

$b^2 + c^2 = a^2$ $\quad 4 \cdot r_i \cdot r = \frac{b \cdot c}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4},$

$r_i = \frac{b \cdot c}{a+b+c}$ $\quad 4 \cdot r = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{b \cdot c},$ $\quad r = \frac{a+b+c}{8},$

$d_{gelb} = \frac{a+b+c}{4}$ w.z.b.w.

Ein großes Dankeschön an Ingmar Rubin, Berlin, der wertvolle Ideen zur Lösung der Aufgabe entwickelte.