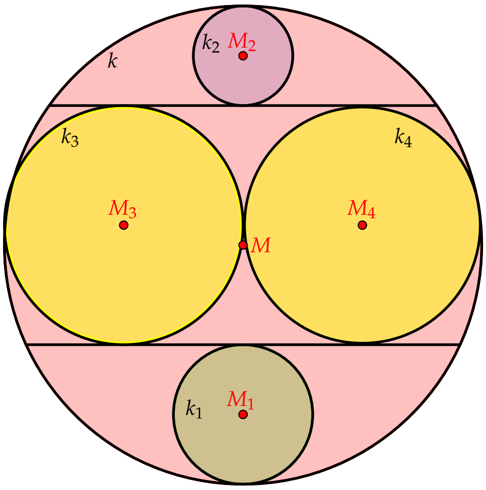
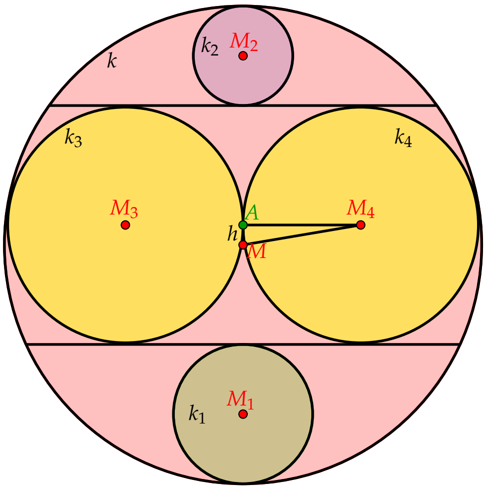
Beweis: Vier Kreise im Kreis

Es ist zu beweisen, dass der Durchmesser eines der beiden kongruenten gelben Halbkreise gleich dem Doppelten des geometrischen Mittels aus dem Durchmesser des grünen und blauen Kreises ist. ($d_3 = 2 \cdot \sqrt{d_1 \cdot d_2}$)



Aufgabe von Prof. J. Marshall Unger, 60 neue Sangaku-Probleme von https://u.osu.edu/unger.26/online-publications/problems-from-wasan-nau/

Lösung



Die Kreise k, k_1, k_2, k_3 und k_4 besitzen die Radien R, r_1, r_2 und r_3.

Im Dreieck ΔMM_4A ist	$(R - r_3)^2 = h^2 + r_3^2$,	$h^2 = R \cdot (R - 2 \cdot r_3)$	...(1).
Weiterhin ist	$2 \cdot R = 2 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2 + 2 \cdot r_3$,	$R = r_1 + r_2 + r_3$	...(2).
Der Radius R ist auch	$R = 2 \cdot r_1 + r_3 - h$		...(3),
bzw.	$R = 2 \cdot r_2 + r_3 + h$		...(4).
(3)-(4)	$2 \cdot r_1 - 2 \cdot r_2 = 2 \cdot h$,	$h = r_1 - r_2$	...(5).
(5) und (2) in (1)	$(r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2 + r_3) \cdot (r_1 + r_2 + r_3 - 2 \cdot r_3)$,		
	$r_1^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 + r_2^2 = (r_1 + r_2 + r_3) \cdot (r_1 + r_2 - r_3)$,		
	$r_1^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 + r_2^2 = r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + 2 \cdot r_1 \cdot r_2$,		
	$r_3^2 = 4 \cdot r_1 \cdot r_2$,	$r_3 = 2 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2}$	
	$2 \cdot r_3 = 4 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2}$	$d_3 = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot r_1 \cdot 2 \cdot r_2}$	
	$\underline{\underline{d_3 = 2 \cdot \sqrt{d_1 \cdot d_2}}}$ w.z.b.w.		