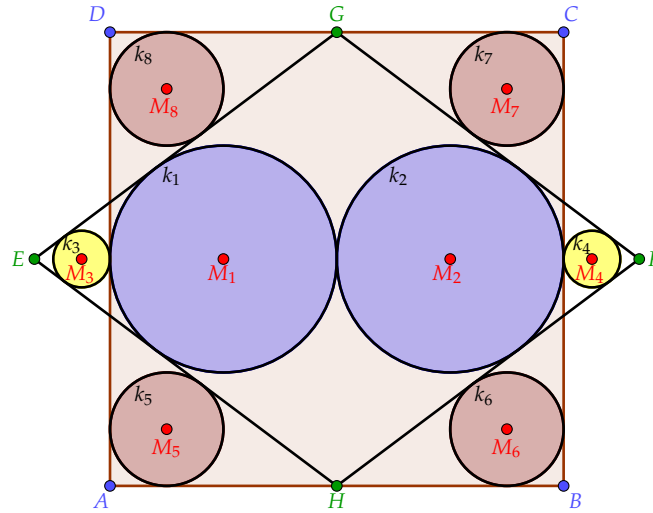


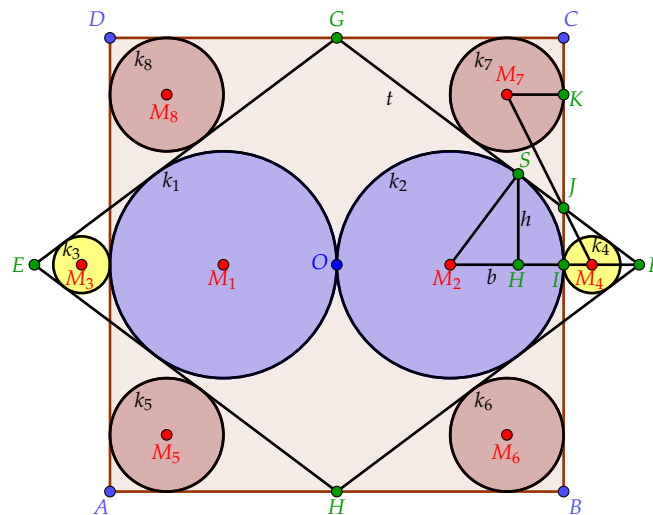
Beweis: Sechs Kreise im Quadrat, zwei Kreise außerhalb des Quadrats

Es ist zu beweisen, dass der Durchmesser eines der vier kongruenten braunen Kreise doppelt so groß ist wie der Durchmesser eines der zwei kongruenten gelben Kreise.



Aufgabe von Prof. J. Marshall Unger, 60 neue Sangaku-Probleme von
<https://u.osu.edu/unger.26/online-publications/problems-from-wasan-nau/>

Lösung



Die Kreise k_1 und k_2 haben den Radius r_1 , die Kreise k_3 und k_4 den Radius r_2 , die Kreise k_5 bis k_8 den Radius r_3 . Der Diagonalschnittpunkt des Quadrats wird in den Koordinatenursprung gelegt. Der Schnittpunkt S der Tangente an den Kreis durch die Punkte F und G muss bestimmt werden. Das Dreieck ΔM_2FS ist rechtwinklig, da $r_1 \perp t$. Nach dem 2. Teil des Strahlensatzes ist

	$\frac{\overline{HF}}{h} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OG}},$	$\frac{a}{2} \cdot \overline{HF} = h \cdot \overline{OF},$...(1)
Höhensatz $\overline{HF} = \frac{h^2}{b}$ in (1)	$\frac{a}{2} \cdot \frac{h^2}{b} = h \cdot \overline{OF},$	$\frac{a}{2} \cdot \frac{h}{b} = \overline{OF},$	
$\overline{OF} = r_1 + \overline{M_2F}$	$\frac{a}{2} \cdot \frac{h}{b} = r_1 + \overline{M_2F},$...(2),
Satz des Euklid $\overline{M_2F} = \frac{r_1^2}{b}$ in (2)	$\frac{a}{2} \cdot \frac{h}{b} = r_1 + \frac{r_1^2}{b},$	$a \cdot h = 2 \cdot b \cdot r_1 + 2 \cdot r_1^2,$	
mit $r_1 = \frac{1}{4} \cdot a$	$a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a + \frac{1}{8} \cdot a^2,$	$h = \frac{1}{2} \cdot (b + \frac{1}{4} \cdot a)$...(3).
Kreisgleichung für k_2	$(x - \frac{a}{4})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2,$	$x^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot x + y^2 = 0,$...(4)
$h = y_S, x_S = r_1 + b$ in (4)	$(r_1 + b)^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (r_1 + b) + h^2 = 0,$...(5)

(3) in (5)

$$\begin{aligned}(r_1 + b)^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (r_1 + b) + \left(\frac{1}{2} \cdot (b + \frac{1}{4} \cdot a)\right)^2 &= 0, \\ r_1^2 + 2 \cdot r_1 \cdot b + b^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot r_1 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{4} \cdot b^2 + \frac{1}{8} \cdot a \cdot b + \frac{1}{64} \cdot a^2 &= 0, \\ r_1^2 + 2 \cdot r_1 \cdot b - \frac{1}{2} \cdot a \cdot r_1 - \frac{3}{8} \cdot a \cdot b + \frac{5}{4} \cdot b^2 + \frac{1}{64} \cdot a^2 &= 0, \\ \frac{1}{16} \cdot a^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b - \frac{1}{8} \cdot a^2 - \frac{3}{8} \cdot a \cdot b + \frac{5}{4} \cdot b^2 + \frac{1}{64} \cdot a^2 &= 0, \\ \frac{1}{8} \cdot a \cdot b + \frac{5}{4} \cdot b^2 - \frac{3}{64} \cdot a^2 &= 0, \quad b^2 + \frac{1}{10} \cdot a \cdot b - \frac{3}{80} \cdot a^2 = 0, \\ b_{1,2} = -\frac{1}{20} \cdot a \pm \sqrt{\frac{a^2}{400} + \frac{3}{80} \cdot a^2}, \quad b_{1,2} = -\frac{1}{24} \cdot a \pm \sqrt{\frac{16}{400} \cdot a^2},\end{aligned}$$

negative Lösung entfällt

b in (3)

$$\begin{aligned}b &= -\frac{1}{20} \cdot a + \frac{4}{20} \cdot a, & b &= \frac{3}{20} \cdot a \\ h &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{20} \cdot a + \frac{1}{4} \cdot a\right), & h &= \frac{5}{20} \cdot a.\end{aligned} \quad \dots(6).$$

Der Punkt S ist damit bestimmt worden, er hat die Koordinaten $S(r_1 + b \mid h)$,

$$S\left(\frac{1}{4} \cdot a + \frac{3}{20} \cdot a \mid \frac{1}{5} \cdot a\right), \quad S\left(\frac{2}{5} \cdot a \mid \frac{1}{5} \cdot a\right).$$

Die Gleichung der Tangente t : $y_t = m \cdot x + \frac{1}{2} \cdot a$ kann bestimmt werden,

sie lautet

$$y_t = \frac{\frac{1}{2} \cdot a - \frac{1}{5} \cdot a}{0 - \frac{2}{5} \cdot a} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot a, \quad y_t = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot a.$$

An der Stelle $x_J = \frac{1}{2} \cdot a$ ist

$$y_J = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a, \quad y_J = \frac{1}{8} \cdot a,$$

die Koordinaten von J sind

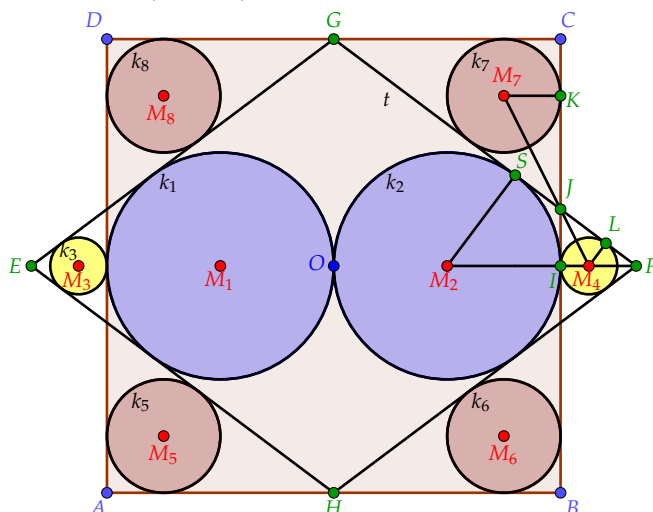
$$J\left(\frac{1}{2} \cdot a \mid \frac{1}{8} \cdot a\right).$$

Die Nullstelle von t ist bei

$$0 = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot a, \quad x_F = \frac{2}{3} \cdot a.$$

Die Koordinaten von F sind

$$F\left(\frac{2}{3} \cdot a \mid 0\right).$$



Nach dem Strahlensatz ist

$$\begin{aligned}\frac{r_2}{FM_4} &= \frac{r_1}{FM_2} \\ r_2 &= \frac{\frac{1}{4} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot a - r_2\right)}{\frac{5}{12} \cdot a}, & r_2 &= \frac{r_1 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot a - \left(\frac{1}{2} \cdot a + r_2\right)\right)}{\frac{2}{3} \cdot a - \frac{1}{4} \cdot a}, \\ \frac{8}{5} \cdot r_2 &= \frac{1}{10} \cdot a, & r_2 &= \frac{1}{10} \cdot a - \frac{3}{5} \cdot r_2, \\ & & \underline{\underline{r_2}} &= \underline{\underline{\frac{1}{16} \cdot a}}\end{aligned} \quad \dots(7).$$

Die Dreiecke $\triangle IM_4J$ und $\triangle JKM_7$ sind zueinander ähnlich, so dass

mit (7), $\overline{JK} = \frac{1}{2} \cdot a - r_3 - y_J$

$$\begin{aligned}\frac{r_3}{\overline{JK}} &= \frac{r_2}{y_J}, & r_3 &= \frac{\frac{1}{16} \cdot a}{\frac{1}{8} \cdot a} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a - r_3 - \frac{1}{8} \cdot a\right), \\ r_3 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot a - r_3\right), & \frac{3}{2} \cdot r_3 &= \frac{3}{16} \cdot a, \\ \underline{\underline{r_3}} &= \underline{\underline{\frac{1}{8} \cdot a}}\end{aligned} \quad \dots(8).$$

Mit (7) und (8) entsteht

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{\frac{1}{8} \cdot a}{\frac{1}{16} \cdot a}, \quad \frac{r_3}{r_2} = \frac{2}{1}, \quad \underline{\underline{\frac{d_3}{d_2} = \frac{2}{1}}} \quad \text{w.z.b.w.}$$

Der Durchmesser von d_3 ist doppelt so groß wie der Durchmesser von d_2 .