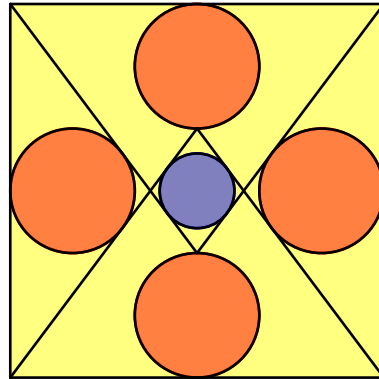


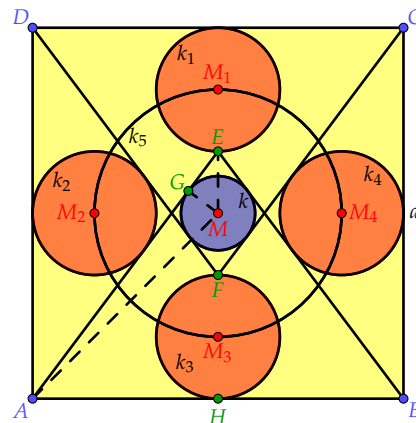
Beweis: Fünf Kreise im Quadrat

Es ist zu beweisen, dass in dem Quadrat ein Durchmesser der vier orangenen kongruenten Kreise gleich $\frac{5}{3}$ des Durchmessers des blauen Kreises ist.



Aufgabe von Prof. J. Marshall Unger, 60 neue Sangaku-Probleme von <https://u.osu.edu/unger.26/online-publications/problems-from-wasan-nau/>

Lösung



Die Kreise k_1 bis k_4 haben die Radien R , der Kreis k hat den Radius r , der Kreis k_5 den Radius r_5 .

Wegen der Symmetrie ist $4 \cdot R + \overline{EF} = a$, $\overline{EF} = a - 4 \cdot R$... (1),

und $\overline{EF} = \frac{1}{3} \cdot a$... (2),

so dass mit (1)=(2) $\frac{1}{3} \cdot a = a - 4 \cdot R$, $a = 6 \cdot R$... (3).

Im Dreieck $\triangle AMG$ ist $\overline{AM}^2 = r^2 + \overline{AG}^2$, $\overline{AG} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - r^2}$, $\overline{AG} = \sqrt{18 \cdot R^2 - r^2}$... (4).

mit (3) $\overline{AG} = \sqrt{\frac{(6 \cdot R)^2}{2} - r^2}$, $\overline{AG} = \sqrt{18 \cdot R^2 - r^2}$... (4).

Im Dreieck $\triangle MEG$ ist $\left(\frac{\overline{EF}}{2}\right)^2 = r^2 + \overline{GE}^2$, $\overline{GE} = \sqrt{R^2 - r^2}$... (5).

Im Dreieck $\triangle AHE$ ist $\left(\overline{AG} + \overline{GE}\right)^2 = (4 \cdot R)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$,

mit (4), (5) und (3) $\left(\sqrt{18 \cdot R^2 - r^2} + \sqrt{R^2 - r^2}\right)^2 = 16 \cdot R^2 + (3 \cdot R)^2$,

quadrieren $18 \cdot R^2 - r^2 + 2 \cdot \sqrt{18 \cdot R^2 - r^2} \cdot \sqrt{R^2 - r^2} + R^2 - r^2 = 25 \cdot R^2$,

zusammenfassen $2 \cdot \sqrt{18 \cdot R^2 - r^2} \cdot \sqrt{R^2 - r^2} = 6 \cdot R^2 + 2 \cdot r^2$,

vereinfachen $\sqrt{18 \cdot R^4 - 19 \cdot R^2 \cdot r^2 + r^4} = 3 \cdot R^2 + r^2$,

quadrieren $18 \cdot R^4 - 19 \cdot R^2 \cdot r^2 + r^4 = 9 \cdot R^4 + 6 \cdot R^2 \cdot r^2 + r^4$,

zusammenfassen $9 \cdot R^4 = 25 \cdot R^2 \cdot r^2$, $3 \cdot R = 5 \cdot r$, $\frac{d_{orange}}{d_{blau}} = \frac{5}{3}$ w.z.b.w.