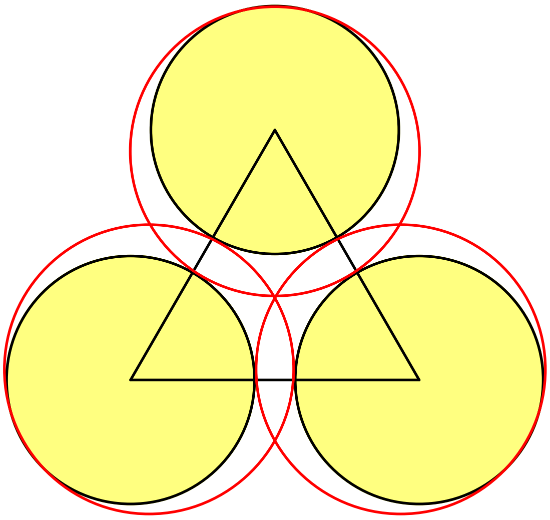
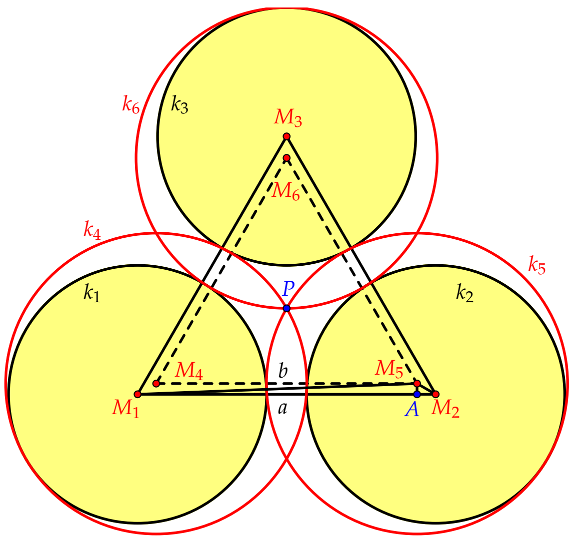
Beweis: Sechs Kreise am gleichseitigen Dreieck

Die Mittelpunkte der drei gleich großen gelben Kreise liegen auf den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks. Jeder rote Kreis berührt alle gelben Kreise und verläuft durch den Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks.
Es ist zu beweisen, dass das Verhältnis der Radien $\frac{r_{gelb}}{r_{rot}} = \frac{6}{7}$ ist.



Aufgabe von Prof. J. Marshall Unger, 60 neue Sangaku-Probleme von
https://u.osu.edu/unger.26/online-publications/problems-from-wasan-nau/

Lösung



Die Kreise k_1 bis k_3 haben die Radien r, die Kreise k_4 bis k_6 die Radien R. Die Grundseite des äußeren gleichseitigen Dreiecks sei $\overline{M_1M_2} = a$ und die des inneren gleichseitigen Dreiecks $\overline{M_4M_5} = b$. Die Entfernungen von einer Grundseite g bis zum Schwerpunkt P sind $s = \frac{g}{6} \cdot \sqrt{3}$.

Im Dreieck ΔM_1AM_5 ist	$\overline{M_1M_5}^2 = \overline{AM_5}^2 + \overline{M_1A}^2$	$(R+r)^2 = \overline{AM_5}^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	...(1).
Im Dreieck ΔAM_2M_5 ist	$\overline{M_2M_5}^2 = \overline{AM_5}^2 + \overline{AM_2}^2$	$(R-r)^2 = \overline{AM_5}^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$	...(2).
(1)−(2)	$4 \cdot r \cdot R = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot a \cdot b,$	$4 \cdot r \cdot R = a \cdot b$	...(3).
Im inneren Dreieck ist	$cos\ 30° = \frac{b}{2 \cdot R},$	$\underline{\underline{b = \sqrt{3} \cdot R}}$	...(4).
(4) in (3)	$4 \cdot r \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot b = a \cdot b$	$\underline{\underline{a = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot r}}$	...(5).

Im Dreieck ΔAM_2M_5 ist	$sin\ 30^\circ = \frac{\overline{AM_5}}{\overline{M_2M_5}}$,	$\overline{M_2M_5} = 2 \cdot \overline{AM_5}$	...(6),
$\overline{AM_5} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a-b)$ in (6)	$R - r = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a-b)$,	$R - r = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (a-b)$,	
mit (4) und (5)	$R - r = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot r - \sqrt{3} \cdot R \right)$,	$R - r = \frac{4}{3} \cdot r - R$,	
	$2 \cdot R = \frac{7}{3} \cdot r$,	$\frac{r}{R} = \frac{6}{7}$,	
	$\underline{\underline{\frac{r_{gelb}}{r_{rot}} = \frac{6}{7}}}$ w.z.b.w.		