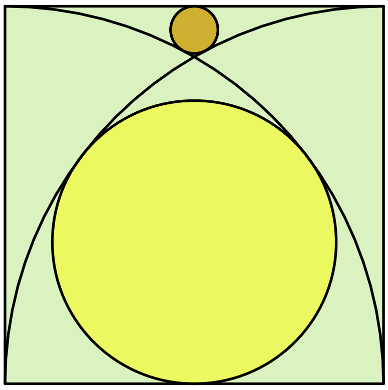
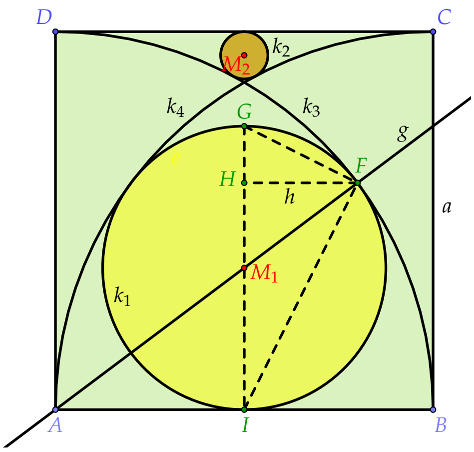
Beweis: Zwei Kreise und zwei Viertelkreise im Quadrat

Der gelbe sowie der braune Kreis liegt im grünen Quadrat.
Es ist zu beweisen, dass der Durchmesser des gelben Kreises sechsmal so groß ist wie der Durchmesser des braunen Kreises.



Aufgabe von Prof. J. Marshall Unger, 60 neue Sangaku-Probleme von
https://u.osu.edu/unger.26/online-publications/problems-from-wasan-nau/

Lösung



Der Punkt A wird in den Koordinatenursprung gelegt. Der gelbe Kreis hat den Radius R, der braune kreis den Radius r und die Viertelkreise die Radien a. Eine Ursprungsgerade g durch die Punkte A und M_1 schneidet den Viertelkreis k_3 im Punkt F.

Die Gleichung von g lautet $\quad y = \frac{2\cdot R}{a}\cdot x \quad$ ...(1).

Die Gleichung von k_3 lautet $\quad x^2 + y^2 = a^2 \quad$ ...(2).

$g \cap k_3 = F$, (1) in (2) $\quad x^2 + \frac{4\cdot R^2}{a^2}\cdot x^2 = a^2, \quad x^2\cdot\left(1+\frac{4\cdot R^2}{a^2}\right) = a^2,$

$\quad x^2 = \frac{a^4}{a^2+4\cdot R^2}, \quad x_F = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+4\cdot R^2}} \quad$ ...(3).

x_F in (1) $\quad y = \frac{2\cdot R}{a}\cdot\frac{a^2}{\sqrt{a^2+4\cdot R^2}}, \quad y_F = \frac{2\cdot a\cdot R}{\sqrt{a^2+4\cdot R^2}} \quad$ ...(4).

Der Punkt F hat die Koordinaten $F\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+4\cdot R^2}}\middle|\frac{2\cdot a\cdot R}{\sqrt{a^2+4\cdot R^2}}\right)$. Nach dem Höhensatz im rechtwinkligen

Dreieck ΔIFG gilt $\quad h^2 = \overline{IH}\cdot\overline{HG}, \quad \left(x_F - \frac{a}{2}\right)^2 = y_F\cdot(2\cdot R - y_F) \quad$ ...(5),

(3), (4) in (5) $\quad \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+4\cdot R^2}} - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{4\cdot a\cdot R^2}{\sqrt{a^2+4\cdot R^2}} - \frac{4\cdot a^2\cdot R^2}{a^2+4\cdot R^2},$

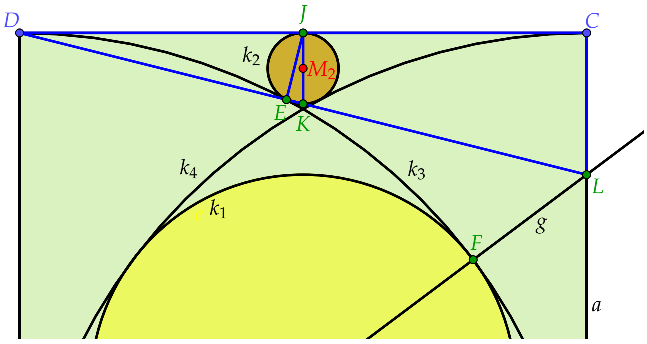
Klammern auflösen $\quad \frac{a^4}{a^2+4\cdot R^2} - \frac{a^3}{\sqrt{a^2+4\cdot R^2}} + \frac{a^2}{4} = \frac{4\cdot a\cdot R^2}{\sqrt{a^2+4\cdot R^2}} - \frac{4\cdot a^2\cdot R^2}{a^2+4\cdot R^2},$

ordnen $\quad \frac{a^4}{a^2+4\cdot R^2} + \frac{4\cdot a^2\cdot R^2}{a^2+4\cdot R^2} + \frac{a^2}{4} = \frac{4\cdot a\cdot R^2}{\sqrt{a^2+4\cdot R^2}} + \frac{a^3}{\sqrt{a^2+4\cdot R^2}},$

kürzen $\qquad \frac{a^2\cdot(a^2+4\cdot R^2)}{a^2+4\cdot R^2} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^3+4\cdot a\cdot R^2}{\sqrt{a^2+4\cdot R^2}}, \qquad a + \frac{a}{4} = \frac{a^2+4\cdot R^2}{\sqrt{a^2+4\cdot R^2}},$

zusammenfassen, $|^2 \qquad \frac{5}{4}\cdot a = \sqrt{a^2+4\cdot R^2}, \qquad \frac{25}{16}\cdot a^2 = a^2 + 4\cdot R^2,$

$4\cdot R^2 = \frac{9}{16}\cdot a^2 \qquad \underline{\underline{R = \frac{3}{8}\cdot a}}$ ...(6).



Die Gerade g schneidet die rechte Quadratseite im Punkt L.

Mit $x = a$ in (1), ist $\qquad y_L = 2\cdot R.$

Die Dreiecke ΔEKJ und ΔDLC sind ähnlich. Nach dem Strahlensatz ist

$\frac{\frac{a}{2}}{2\cdot r} = \frac{a}{a-2\cdot R}, \qquad 4\cdot r = a - 2\cdot R,$ ...(7)

mit (6) $\qquad 4\cdot r = a - 2\cdot\frac{3}{8}\cdot a, \qquad 4\cdot r = \frac{1}{4}\cdot a,$

$\underline{\underline{r = \frac{1}{16}\cdot a}}$ ...(8).

Das Verhältnis kann nun bestimmt werden.

Mit (7) und (8) ist $\qquad 4\cdot r = 16\cdot r - 2\cdot R, \qquad 2\cdot R = 12\cdot r,$

$R = 6\cdot r, \qquad \frac{d_{gelb}}{d_{braun}} = 6:1$ w.z.b.w.