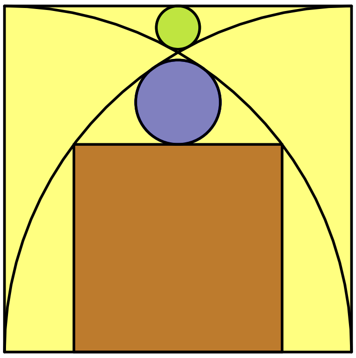
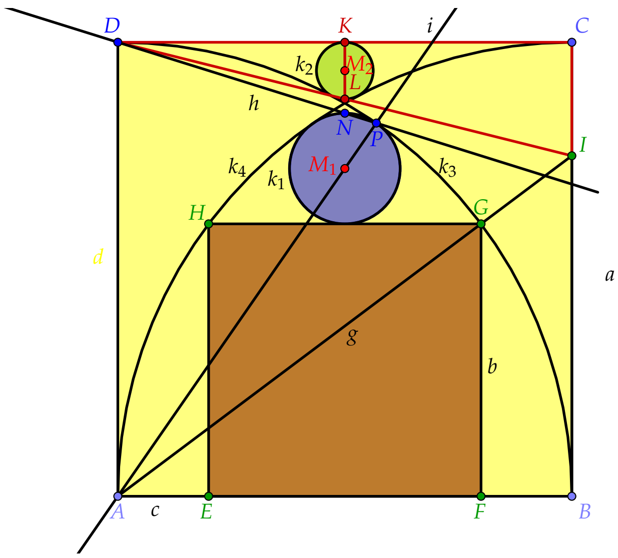
Beweis: Zwei Kreise und zwei Viertelkreise im Quadrat

Der blaue sowie der grüne Kreis liegt im gelben Quadrat.
Es ist zu beweisen, dass das Verhältnis des Durchmessers des grünen Kreises zum Durchmesser des blauen Kreises $\frac{20}{39}$ ist.



Aufgabe von Prof. J. Marshall Unger, 60 neue Sangaku-Probleme von
https://u.osu.edu/unger.26/online-publications/problems-from-wasan-nau/

Lösung



Der Punkt A wird in den Koordinatenursprung gelegt. Der blaue Kreis hat den Radius R, der grüne Kreis den Radius r und die Viertelkreise die Radien a. Eine Ursprungsgerade g durch die Punkte A und G schneidet das äußere Quadrat im Punkt I. Der Punkt P ist der Schnittpunkt der Geraden h durch die Punkte D und N, der Ursprungsgeraden i durch M_1, sowie den Kreisen k_1 und k_3.

Es ist mit $c = \overline{AE}$	$a = 2 \cdot c + b$	$c = \frac{a-b}{2}$	...(1).
Im Dreieck ΔAFG ist	$(c+b)^2 + b^2 = a^2,$	$(c+b)^2 = a^2 - b^2,$	
mit (1)	$\left(\frac{a-b}{2} + b\right)^2 = a^2 - b^2,$	$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = a^2 - b^2,$	
	$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 4 \cdot a^2 - 4 \cdot b^2,$	$b^2 + \frac{2}{5} \cdot a \cdot b - \frac{3}{5} \cdot a^2 = 0,$	
	$b_{1,2} = -\frac{1}{5} \cdot a \pm \sqrt{\frac{1}{25} \cdot a^2 + \frac{3}{5} \cdot a^2},$	$b_{1,2} = -\frac{1}{5} \cdot a \pm \sqrt{\frac{16}{25} \cdot a^2}$	
positive Lösung entfällt	$b = -\frac{1}{5} \cdot a \pm \frac{4}{5} \cdot a$	$b = \frac{3}{5} \cdot a$	...(2).

Die Gleichung von g lautet $\quad y = \frac{b}{b+c} \cdot x \qquad y = \frac{b}{b+\frac{a-b}{2}} \cdot x$

mit (2) $\quad y = \frac{2 \cdot \frac{3}{5} \cdot a}{a+\frac{3}{5} \cdot a} \cdot x \qquad y = \frac{3}{4} \cdot x \qquad$ ...(3).

Die Gerade g schneidet die rechte Quadratseite im Punkt I.

Mit $x = a$ in (3), ist $\quad y_I = \frac{3}{4} \cdot a \qquad$ ...(4).

Nach dem Strahlensatz ist

mit (4) $\quad \frac{\frac{a}{2}}{2 \cdot r} = \frac{a}{a-\frac{3}{4} \cdot a}, \qquad \underline{\underline{r = \frac{1}{16} \cdot a}} \qquad$ ...(5).

Die Gleichung von h lautet $\quad y = -\frac{a-b-2 \cdot R}{\frac{a}{2}} \cdot x + a, \qquad y = \left(-2 + \frac{2 \cdot b}{a} + \frac{4 \cdot R}{a}\right) \cdot x + a,$

mit (2) $\quad y = \left(\frac{4 \cdot R}{a} - \frac{4}{5}\right) \cdot x + a \qquad$ ...(6).

Die Gleichung von i lautet $\quad y = \frac{b+R}{\frac{a}{2}} \cdot x, \qquad y = 2 \cdot \frac{b+R}{a} \cdot x,$

mit (2) $\quad y = 2 \cdot \frac{\frac{3}{5} \cdot a+R}{a} \cdot x, \qquad y = \left(\frac{2 \cdot R}{a} + \frac{6}{5}\right) \cdot x \qquad$ ...(7).

(6)=(7) $\quad \left(\frac{4 \cdot R}{a} - \frac{4}{5}\right) \cdot x + a = \left(\frac{2 \cdot R}{a} + \frac{6}{5}\right) \cdot x, \qquad \left(\frac{4 \cdot R}{a} - \frac{4}{5} - \frac{2 \cdot R}{a} - \frac{6}{5}\right) \cdot x + a = 0,$

$\left(2 - \frac{2 \cdot R}{a}\right) \cdot x = a, \qquad x_P = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{a-R} \qquad$ ...(8).

(8) in (7) $\quad y = \left(\frac{2 \cdot R}{a} + \frac{6}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{a-R}, \qquad y = \frac{a \cdot R}{a-R} + \frac{3}{5} \cdot \frac{a^2}{a-R},$

Die Koordinaten von P sind $\quad y_P = \frac{5 \cdot a \cdot R+3 \cdot a^2}{5 \cdot (a-R)}, \qquad P\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{a-R} \middle| \frac{a \cdot (5 \cdot R+3 \cdot a)}{5 \cdot (a-R)}\right).$

$P \in k_3$ mit $k_3 : x^2 + y^2 = a^2 \quad \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{a-R}\right)^2 + \left(\frac{a \cdot (5 \cdot R+3 \cdot a)}{5 \cdot (a-R)}\right)^2 = a^2, \qquad \left(\frac{a}{2 \cdot (a-R)}\right)^2 + \left(\frac{5 \cdot R+3 \cdot a}{5 \cdot (a-R)}\right)^2 = 1,$

$\frac{25 \cdot a^2}{100 \cdot (a-R)^2} + \frac{4 \cdot (5 \cdot R+3 \cdot a)^2}{100 \cdot (a-R)^2} = 1,$

$25 \cdot a^2 + 100 \cdot R^2 + 120 \cdot a \cdot R + 36 \cdot a^2 = 100 \cdot a^2 - 200 \cdot a \cdot R + 100 \cdot R^2,$

$320 \cdot a \cdot R = 39 \cdot a^2, \qquad \underline{\underline{R = \frac{39}{320} \cdot a.}}$

Das Verhältnis $r : R$ beträgt $\quad r : R = \frac{\frac{1}{16} \cdot a}{\frac{39}{320} \cdot a}, \qquad r : R = \frac{20}{39}, \qquad \frac{d_{grün}}{d_{blau}} = \frac{20}{39} \quad$ w.z.b.w.