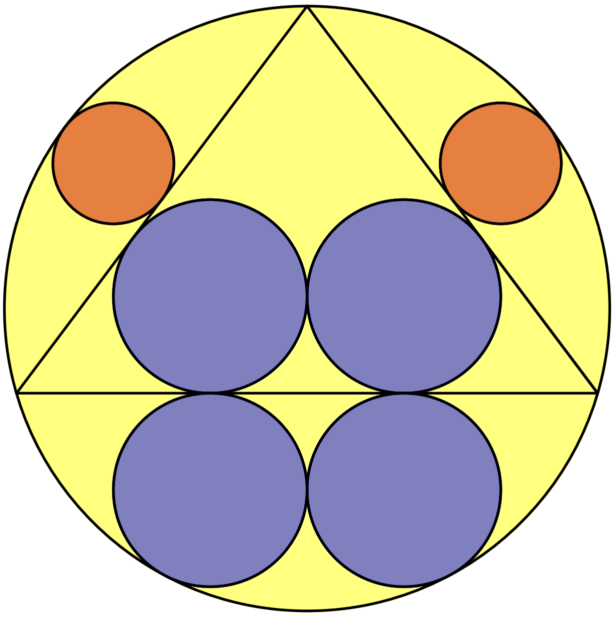
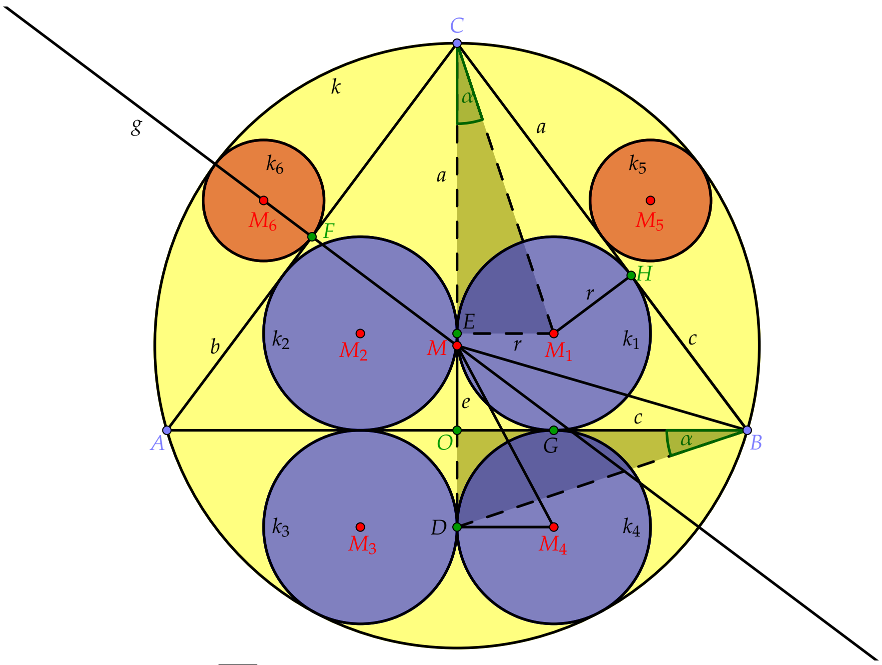
Beweis: Sechs Kreise und ein gleichschenkliges Dreieck im Kreis

Zwei gleiche braune Kreise berühren die Mittelpunkte der Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks und sein Kreis. Zwei gleiche blaue Kreise berühren die Basis und die Seiten, und zwei weitere blaue Kreise berühren die Basis und Umkreis.
Es ist zu beweisen, dass ein Durchmesser des braunen Kreises $\frac{5}{8}$ des Durchmesser eines blauen Kreises ist.



Aufgabe von Prof. J. Marshall Unger, 60 neue Sangaku-Probleme von
https://u.osu.edu/unger.26/online-publications/problems-from-wasan-nau/

Lösung



Die Mitte O der Grundseite $\overline{AB} = 2 \cdot a$ wird in den Koordinatenursprung gelegt, die Schenkel des Dreiecks ΔABC werden mit b bezeichnet und die Höhe mit $h = \overline{OC}$. Der Radius des Umkreises k des Dreiecks ΔABC sei R, die Radien der blauen Kreise r und die Radien der braunen Kreise r^*. In der Figur existieren drei kongruente Dreiecke ΔODB, ΔEM_1C und ΔM_1HC.

So haben die Dreiecke ΔODB und ΔEM_1C der Radius r als kurze Kathete (s), einen rechten Winkel (w) und kongruente Winkel α (w), da deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen (Höhe des Dreiecks $h_{\Delta DBC} \perp \overline{DB}$). Dann sind nach dem Innenwinkelsatz die Winkel $\sphericalangle ODB = \sphericalangle EM_1C$, so dass $\Delta ODB \cong \Delta EM_1C$ nach dem Kongruenzsatzes wsw. Das Dreieck ΔM_1HC ist das an der Achse $\overline{M_1C}$ gespiegelte Dreieck ΔEM_1C. Damit haben die Seiten $\overline{EC}$ und $\overline{HC}$ die Länge a. Nun kann gerechnet werden. Für die Katheten des Dreiecks ΔOBC gilt $a = r + c$

und	$b = a + c,$	$b = r + 2 \cdot c,$	...(1)
$c = a - r$ in (1)	$b = r + 2 \cdot (a - r),$	$b = 2 \cdot a - r$	...(2).
Im Dreieck ΔOBC ist	$a^2 + h^2 = b^2,$		
mit $h = a + r$ und (2)	$a^2 + (a + r)^2 = (2 \cdot a - r)^2,$	$2a^2 + 2 \cdot a \cdot r + r^2 = 4a^2 - 4 \cdot a \cdot r + r^2,$	
	$6 \cdot a \cdot r = 2 \cdot a^2,$	$\underline{\underline{a = 3 \cdot r}}$	...(3).
Im Dreieck ΔOBM ist	$a^2 = R^2 - e^2,$		...(4).
Im Dreieck ΔDM_4M ist	$r^2 + (r + e)^2 = (R - r)^2,$	$2r^2 + 2 \cdot e \cdot r + e^2 = R^2 - 2 \cdot r \cdot R + r^2,$	
ordnen und mit (4)	$r^2 + 2 \cdot e \cdot r + 2 \cdot r \cdot R = R^2 - e^2,$	$r \cdot (r + 2 \cdot e + 2 \cdot R) = a^2,$	
nach e umstellen, mit (3)	$e = \frac{a^2}{2 \cdot r} - \frac{1}{2} \cdot r - R,$	$e = 4 \cdot r - R,$	...(5)
(5) in (4), mit (3)	$a^2 = R^2 - (4 \cdot r - R)^2,$	$9 \cdot r^2 = 8 \cdot r \cdot R - 16 \cdot r^2,$	
zusammenfassen	$25 \cdot r^2 = 8 \cdot r \cdot R,$	$\underline{\underline{r = \frac{8}{25} \cdot R}}$	...(6).

Die Gerade g verläuft durch den Mittelpunkt der Kathete b. Mit Hilfe des Sehnensatzes ist

	$2 \cdot r^* \cdot (2 \cdot R - 2 \cdot r^*) = \left(\frac{b}{2}\right)^2,$	$4 \cdot r^* \cdot R - 4 \cdot r^{*2} = \frac{b^2}{4},$
(3) in (2), $b = 5 \cdot r$	$r^{*2} - R \cdot r^* + \frac{b^2}{16} = 0,$	$r^{*2} - R \cdot r^* + \frac{25}{16} \cdot r^2 = 0,$
mit (6)	$r^{*2} - R \cdot r^* + \frac{25}{16} \cdot \frac{64}{25^2} \cdot R^2 = 0,$	$r^{*2} - R \cdot r^* + \frac{4}{25} \cdot R^2 = 0,$
	$r^*_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot R \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot R^2 - \frac{4}{25} \cdot R^2},$	$r^*_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot R \pm \frac{3}{10} \cdot R,$
positive Lösung entfällt	$\underline{\underline{r^* = \frac{1}{5} \cdot R.}}$	

Das Verhältnis ist dann $\quad \frac{r^*}{r} = \frac{\frac{1}{5} \cdot R}{\frac{8}{25} \cdot R}, \quad \frac{r^*}{r} = \frac{5}{8}, \quad \frac{d_{braun}}{d_{blau}} = \frac{5}{8},$ w.z.b.w.

Herzlichen Dank an Ingmar Rubin, Berlin, der wertvolle Hinweise zur Lösung der Aufgabe gab.