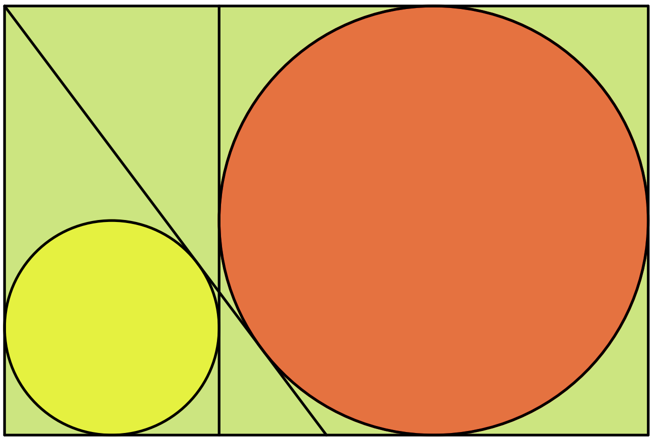
Beweis: Zwei Kreise im Rechteck

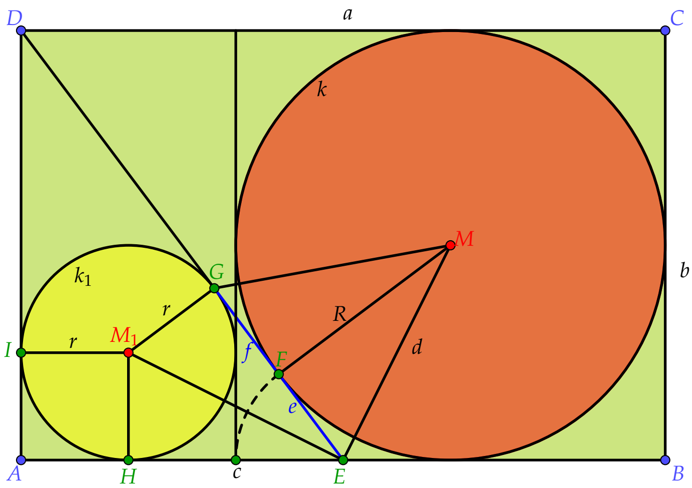
Es ist zu beweisen, dass der Radius des roten Kreises doppelt so groß ist wie der Radius des gelben Kreises.



Aufgabe von Prof. J. Marshall Unger, 60 neue Sangaku-Probleme von https://u.osu.edu/unger.26/online-publications/problems-from-wasan-nau/

Lösung

Die Kreise k und k_1 haben die Radien R und r. Die Seiten des Rechtecks sind a und $b = 2 \cdot R$. Die Dreiecke ΔM_1EG und ΔEMF sind zueinander ähnlich, da die Schenkel zweier Winkel paarweise senkrecht aufeinander stehen. Der Kreis k_1 ist Inkreis des Dreiecks ΔAED. Der Radius des Inkreises kann mit der Gleichung $r = \frac{2\cdot A}{a+b+c}$ berechnet werden, wenn die Seitenlängen des Dreiecks a, b und c sind mit dem Flächeninhalt A.



Dann ist der Inkreisradius $\quad r = \frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot(r+c)\cdot 2\cdot R}{(2\cdot R)+(r+c)+(2\cdot R-r+c)}, \quad r = \frac{(r+c)\cdot R}{2\cdot R+c},$

$2\cdot r\cdot R + c\cdot r = r\cdot R + c\cdot R, \quad c = \frac{r\cdot R}{R-r}$ ...(1).

Aus $\Delta M_1EG \sim \Delta EMF$ wird $\quad \frac{r}{e+f} = \frac{e}{R}, \quad e = \frac{r\cdot R}{e+f}$ ...(2),

$e + f = c$, (1) in (2) $\quad e = \frac{r\cdot R}{\frac{r\cdot R}{R-r}} \quad e = R - r$ ...(3).

$\overline{HE} = c$, $e = c - r$ mit (1) $\quad e = \frac{r\cdot R}{R-r} - r, \quad e = \frac{r\cdot R - r\cdot(R-r)}{R-r},$

$e = \frac{r\cdot R - r\cdot R + r^2}{R-r}, \quad e = \frac{r^2}{R-r}$ ...(4).

(3)=(4) $\quad R - r = \frac{r^2}{R-r}, \quad (R-r)^2 = r^2$

$R^2 - 2\cdot r\cdot R = 0 \quad \underline{\underline{R = 2\cdot r}}$ w.z.b.w.

Damit ist $e = r$, $f = r$ und die Dreiecke ΔM_1EG, ΔEMF und ΔFMG sind kongruent.