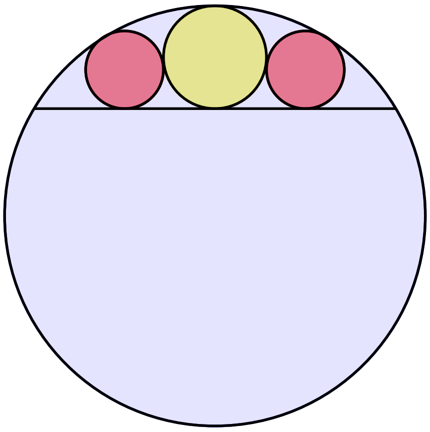
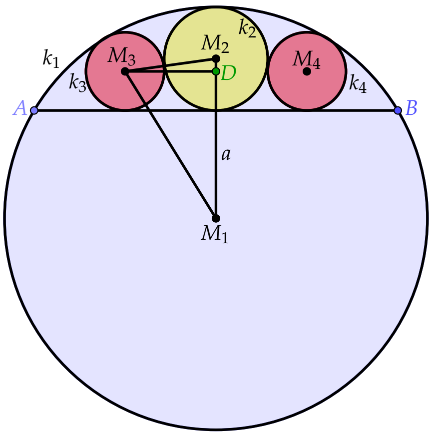
Beweis: Sehne und geometrisches Mittel

Es ist zu beweisen, dass das Doppelte des geometrischen Mittels aus den Durchmessern eines roten und des blauen Kreises gleich der Länge der Sehne im blauen Kreis ist. $(s = 2\cdot\sqrt{d_{blau}\cdot d_{rot}})$
Die beiden roten Kreise haben gleiche Durchmesser.



Aufgabe von Prof. J. Marshall Unger, 60 neue Sangaku-Probleme von
https://u.osu.edu/unger.26/online-publications/problems-from-wasan-nau/

Lösung



Die Radien der Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 sind R, r_2 und $r_3 = r_4$.

Im Dreieck ΔM_3DM_2 ist	$(r_2+r_3)^2 = (r_2-r_3)^2+\overline{M_3D}^2$,	$\overline{M_3D} = 2\cdot\sqrt{r_2\cdot r_3}$	...(1)
Der Sehnensatz liefert	$d_{gelb}\cdot\left(2\cdot R - d_{gelb}\right) = \frac{s}{2}\cdot\frac{s}{2}$,	$d_{gelb}^2 - 2\cdot R\cdot d_{gelb} + \frac{s^2}{4} = 0$,	
pos. Lösung entfällt	$d_{gelb} = R - \sqrt{R^2-\frac{s^2}{4}}$		...(2).
Im Dreieck ΔM_1DM_3 ist	$(R-r_3)^2 = (a+r_3)^2+\overline{M_3D}^2$,		
mit (1)	$R^2 - 2\cdot R\cdot r_3 + r_3^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot r_3 + r_3^2 + 4\cdot r_2\cdot r_3$,		
$a = R - 2\cdot r_2$	$R^2 - 2\cdot R\cdot r_3 = R^2 - 4\cdot R\cdot r_2 + 4\cdot r_2^2 + 2\cdot R\cdot r_3 - 4\cdot r_2\cdot r_3 + 4\cdot r_2\cdot r_3$,		
zusammengefasst	$4\cdot R\cdot r_2 - 4\cdot r_2^2 - 4\cdot R\cdot r_3 = 0$,	$r_2^2 - R\cdot r_2 + R\cdot r_3 = 0$	
pos. Lösung entfällt	$r_{2_{1,2}} = \frac{R}{2}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4}-R\cdot r_3}$,	$r_2 = \frac{R}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{R^2-4\cdot R\cdot r_3}$,	
$2\cdot r_2 = d_{gelb}$	$d_{gelb} = R - \sqrt{R^2-4\cdot R\cdot r_3}$		...(3).
(2)=(3)	$\sqrt{R^2-\frac{s^2}{4}} = \sqrt{R^2-4\cdot R\cdot r_3}$,	$s^2 = 16\cdot R\cdot r_3$,	
$R = \frac{d_{blau}}{2}$, $r_3 = \frac{d_{rot}}{2}$	$s = 4\cdot\sqrt{R\cdot r_3}$,	$s = 2\cdot\sqrt{d_{blau}\cdot d_{rot}}$ w.z.b.w.	