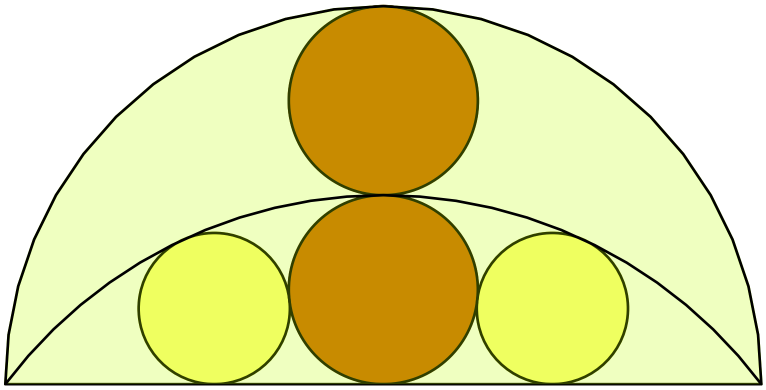
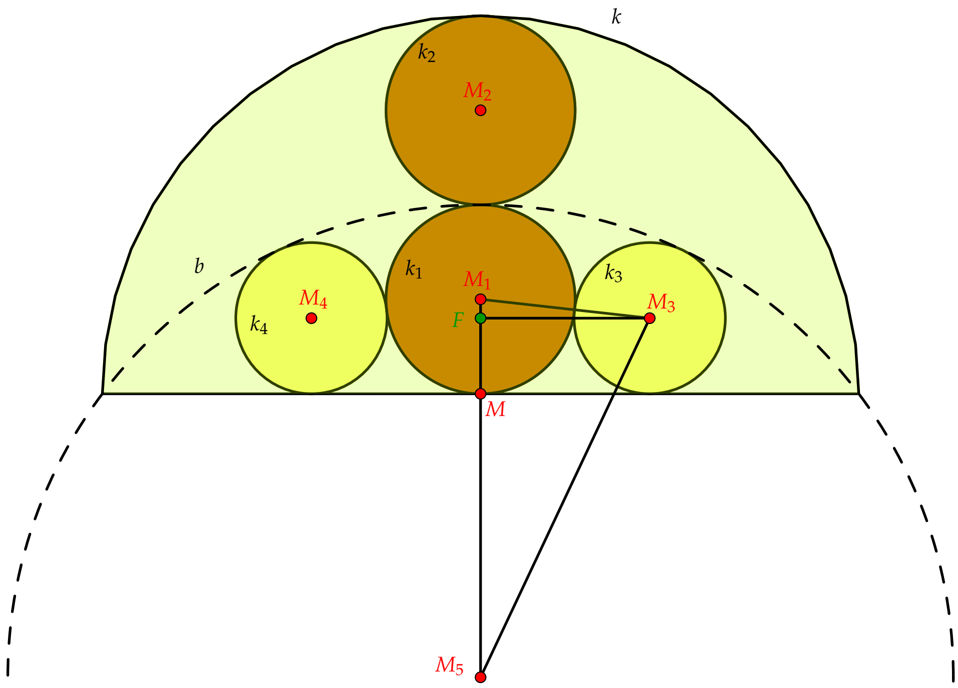
Beweis: Vier Kreise im Halbkreis

Es ist zu beweisen, dass sich das Verhältnis eines Durchmessers der kongruenten braunen Kreise zum Durchmesser der kongruenten gelben Kreise wie 5 : 4 verhält.



Aufgabe von Prof. J. Marshall Unger, 60 neue Sangaku-Probleme von https://u.osu.edu/unger.26/online-publications/problems-from-wasan-nau/

Lösung



Der Halbkreis k hat den Radius R, die Kreise k_1, k_2 den Radius r_1, die Kreise k_3, k_4 den Radius r_2 und der Kreis b den Radius $r_3 = \frac{5}{4} \cdot R$ mit M_5 als Mittelpunkt.

Im Dreieck ΔFM_3M_1 ist $\quad (r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + \overline{FM_3}^2, \quad \overline{FM_3} = 2 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2}$ ...(1).

Im Dreieck ΔM_5M_3F ist $\quad \left(\frac{5}{4} \cdot R - r_2\right)^2 = \left(\frac{3}{4} \cdot R + r_2\right)^2 + \overline{FM_3}^2,$

mit (1) $\quad \frac{25}{16} \cdot R^2 - \frac{5}{2} \cdot R \cdot r_2 + r^2 = \frac{9}{16} \cdot R^2 + \frac{3}{2} \cdot R \cdot r_2 + r^2 + 4 \cdot r_1 \cdot r_2,$

$R^2 = 4 \cdot R \cdot r_2 + 4 \cdot r_1 \cdot r_2,$

$R = 4 \cdot r_1 \quad 16 \cdot r_1^2 = 16 \cdot r_1 \cdot r_2 + 4 \cdot r_1 \cdot r_2, \quad 16 \cdot r_1 = 20 \cdot r_2,$

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{4}.$ w.z.b.w.