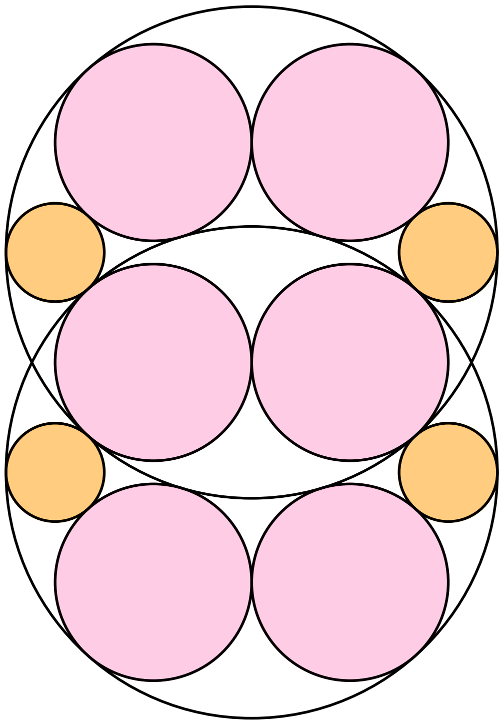
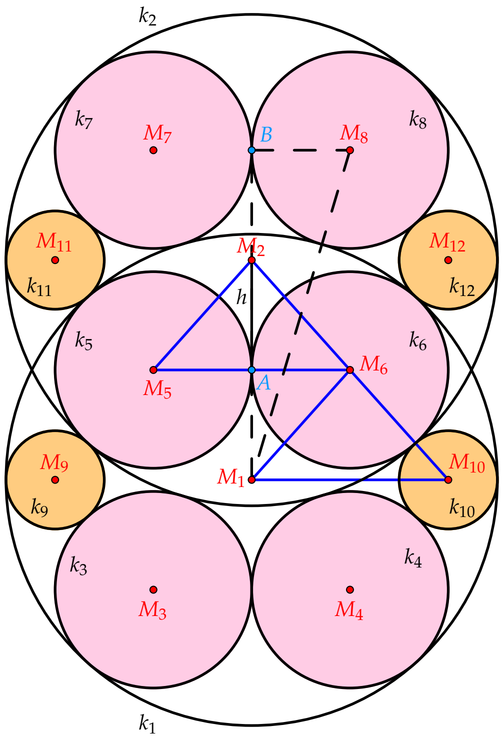
Beweis: Zehn kleine Kreise in zwei große Kreise

Es ist zu beweisen, dass die Verhältnisse der Durchmesser der beiden ungefärbten kongruenten Kreise, der sechs rosa gefärbten kongruenten Kreise und der vier orangenen kongruenten Kreise 5 : 2 : 1 sind.



Lösung



Die Kreise k_1 und k_2 haben den Radius R, die Kreise k_3 bis k_8 den Radius r_1 und die Kreise k_9 bis k_{12} den Radius r_2. Die Mittelpunkte M_1, M_{10} und M_6 sowie M_5, M_6 und M_2 sind Eckpunkte zweier kongruenter, gleichschenkliger Dreiecke.

Es ist $\overline{M_1M_{10}} = \overline{M_5M_6}$,	$R - r_2 = 2 \cdot r_1$,		...(1).
Im Dreieck $M_1M_{10}M_2$ ist	$(R + r_2)^2 = (2 \cdot h)^2 + (R - r_2)^2$	$h^2 = r_2 \cdot R$	...(2).
Im Dreieck M_1M_8B ist	$(R + r_1)^2 = r_1^2 + (3 \cdot h)^2$,	$9 \cdot h^2 = R \cdot (R + 2 \cdot r_1)$	...(3).
(1) in (3)	$9 \cdot h^2 = R \cdot (R + R + r_2)$,	$9 \cdot h^2 = R \cdot (2 \cdot R - r_2)$,	...(4)
(2) in (4)	$9 \cdot r_2 \cdot R = R \cdot (2 \cdot R - r_2)$,	$10 \cdot r_2 = 2 \cdot R$,	
	$\underline{\underline{R = 5 \cdot r_2}}$.		
R in (1)	$4 \cdot r_2 = 2 \cdot r_1$,	$\underline{\underline{r_1 = 2 \cdot r_2}}$	
$\Rightarrow$	$\underline{\underline{R = \frac{5}{2} \cdot r_1}}$		

Die Radien der Kreise verhalten sich wie $R : r_1 : r_2 = 5 : 2 : 1$. w.z.b.w.