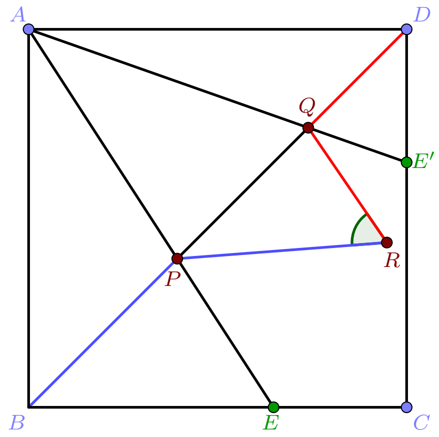
Beweis, dass der Winkel $\alpha = 60°$ groß ist

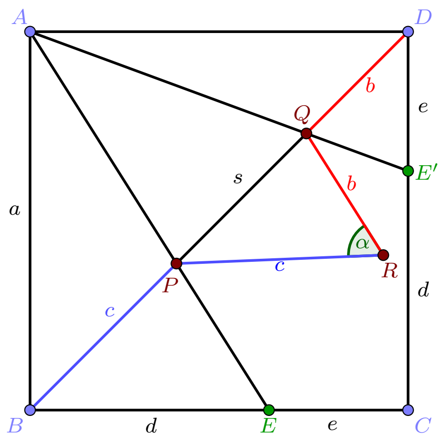
Für jeden Punkt E auf der Seite $\overline{BC}$ des Quadrats $\square ABCD$ sei E' auf der Seite $\overline{CD}$ so gewählt, dass $\overline{DE'} = \overline{CE}$ ist, und die Linien $\overline{AE}$ und $\overline{AE'}$ die Diagonale BD in den Punkten P bzw. Q schneiden. Wenn R einer der Punkte ist, deren Abstand von P gleich $\overline{PB}$ und von Q gleich $\overline{QD}$ ist, dann beweisen Sie, dass $\sphericalangle QRP = 60°$ ist.



Aufgabe aus https://www.zahlenjagd.at, Frühlingsaufgabe 2022 vom 22.März 2022

Lösung

Beweis von Andreas Grieser, Greifswald



Es sind die Strecken $\overline{PB} = c$, $\overline{QD} = b$ und $\overline{PQ} = s$. Die Dreiecke ΔBEP und ΔAPD sind zueinander ähnlich, wie auch die Dreiecke ΔBQA und $\Delta QE'D$.

Mit $\Delta BEP \sim \Delta APD$ ist $\quad \frac{d}{c} = \frac{a}{b+s}$, $\quad d = \frac{a \cdot c}{b+s}$ ...(1),

und $\Delta QE'D \sim \Delta BQA$ $\quad \frac{e}{b} = \frac{a}{c+s}$, $\quad e = \frac{a \cdot b}{c+s}$ ...(2),

(1)+(2), $d + e = a$ $\quad d + e = \frac{a \cdot c}{b+s} + \frac{a \cdot b}{c+s}$, $\quad a = \frac{a \cdot c}{b+s} + \frac{a \cdot b}{c+s}$,

$| : a$, umformen $\quad (b+s) \cdot (c+s) = c \cdot (c+s) + b \cdot (b+s)$,

$b \cdot c + b \cdot s + c \cdot s + s^2 = c^2 + c \cdot s + b^2 + b \cdot s$,

$b \cdot c + s^2 = c^2 + b^2$ $\quad s^2 = b^2 + c^2 - b \cdot c$ ...(3).

Im Dreieck ΔPRQ ist $\quad s^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\ \alpha$ ...(4),

(3)=(4) $\quad b^2 + c^2 - b \cdot c = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\ \alpha$

$-b \cdot c = -2 \cdot b \cdot c \cdot cos\ \alpha$ $\quad cos\ \alpha = \frac{1}{2}$

$\underline{\underline{\alpha = 60°}}$ w.z.b.w.