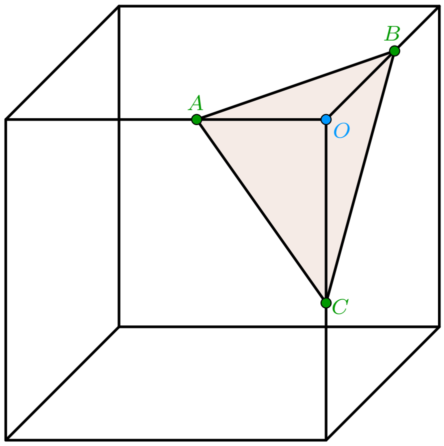
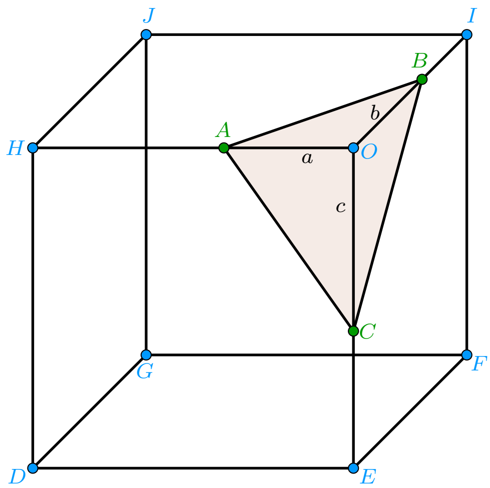
Abgeschnittene Ecke eines Würfels

Schneidet man an einem Würfel eine Ecke ab, so ist die räumliche Ecke OABC ein Tetraeder mit den rechtwinkeligen Dreiecken ΔOBA, ΔOCB und ΔOAC als Seitenfläche. Zwischen dem Flächeninhalt G der Grundfläche ABC des Tetraeders und den Flächeninhalten $A_1 = A_{OAC}$, $A_2 = A_{OCB}$, $A_3 = A_{OBA}$ der Seitenflächen besteht der Zusammenhang $G^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$. Beweisen Sie diesen Satz, den Johann FAULHABER (1580-1635) entdeckte.



Nach der Aufgabe des Monats, aus https://www.zahlenjagd.at/aufgaben.php, aus dem Juli 2021

Lösung



Der Punkt $O(0|0|0)$ wird in den Koordinatenursprung gelegt. Dann haben die Punkte A, B und C im räumlichen Koordinatensystem die Koordinaten $A(0|-a|0)$, $B(-b|0|0)$, $C(0|0|-c)$. Die Vektoren sind $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -c \end{pmatrix}$.

Das Kreuzprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ liefert den Normalenvektor der Ebene E_{ABC}: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} ac \\ bc \\ ab \end{pmatrix}$.

Der halbe absolute Betrag des Normalenvektors erzeugt den Flächeninhalt der Grundfläche G.

Dann ist $\quad G = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (ab)^2}$, $\quad G^2 = \left(\frac{ac}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2}\right)^2$,

$A_1 = \frac{ac}{2}$, $A_2 = \frac{bc}{2}$, $A_3 = \frac{ab}{2}$ $\quad \underline{\underline{G^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}$ w.z.b.w.