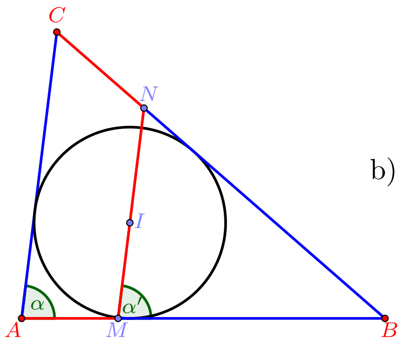
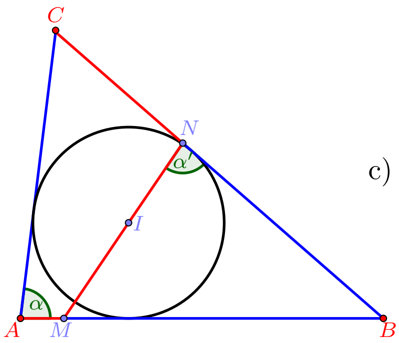
Beweise: $\overline{AM} + \overline{CN} = \overline{MN}$ bzw. $\overline{BM} + \overline{CN} = \overline{MN}$

Der Punkt I ist der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ΔABC. Die Punkte M und N liegen auf den Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ und I liegt auf $\overline{MN}$. Weiterhin ist $\alpha = \alpha'$.
Man beweise jeweils, dass $\overline{AM} + \overline{CN} = \overline{MN}$.

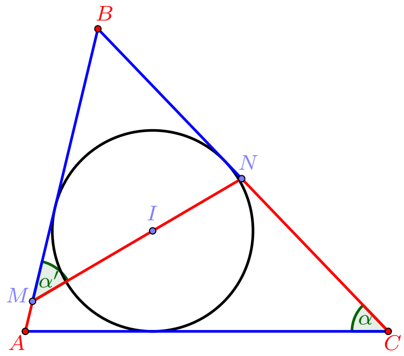
a)



b)



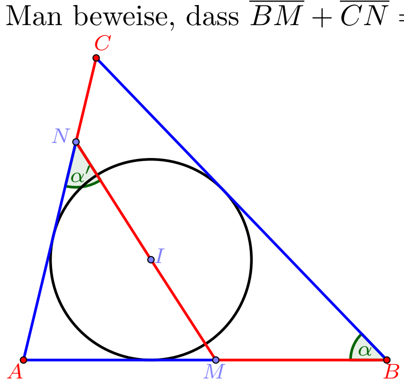
c)



Aufgaben von Dr. Eugen Willerding, vom 25. Mai 2022

Der Punkt N liegt auf der Seite $\overline{AC}$. Man beweise, dass $\overline{BM} + \overline{CN} = \overline{MN}$.

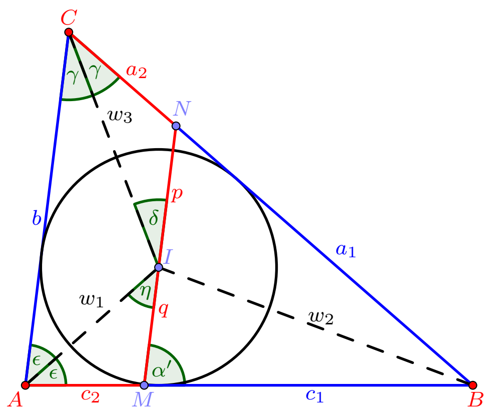
d)



Aufgabe 2022-19 aus der Zeitschrift „$\sqrt{Die\ Wurzel}$" von Sefket Arslanagic, Sarajewo, Bosnien und Herzogowina, vom Mai 2022

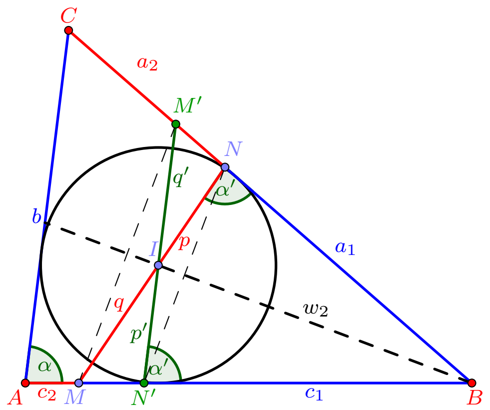
Lösung
Beweise von Andreas Grieser, Greifswald

zu a)



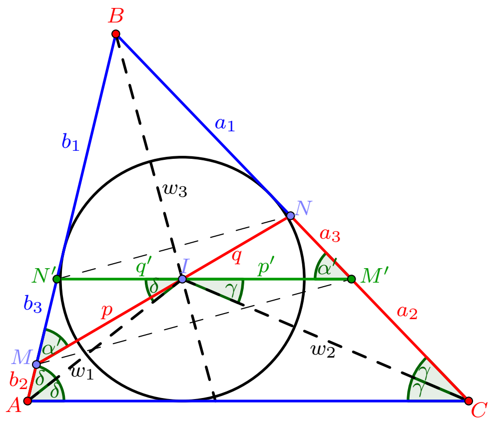
Die Winkelhalbierenden w_1, w_2 und w_3 schneiden sich im Punkt I.
Die Winkel γ und δ sind Wechselwinkel an den von w_3 geschnittenen Parallelen b und p. Das Dreieck ΔINC ist damit gleichschenklig und $a_2 = p$ ...(1).
Analog gilt mit $\alpha = 2 \cdot \epsilon$ für das Dreieck ΔAMI, dass $\epsilon = \eta$ und somit $c_2 = q$ ...(2).
(2)+(1) ergibt $c_2 + a_2 = q + p$ mit $q + p = \overline{MN} \quad \Rightarrow \quad \overline{AM} + \overline{CN} = \overline{MN}$ w.z.b.w.

zu b)



Werden die Punkte M und N an der Winkelhalbierenden w_2 gespiegelt, entstehen die Punkte M' und N'. Die Dreiecke $\Delta MN'I$ und $\Delta INM'$ sind kongruent. Im Drachenviereck $\square N'BNI$ ist $\sphericalangle IN'B = \alpha'$, so dass die Strecken b und p' parallel zueinander verlaufen. Da $p' = p$ und $q' = q$, ist $p + q = p' + q'$, Fall a) tritt ein, so dass mit $q + p = \overline{MN} \quad \Rightarrow \quad \overline{AM} + \overline{CN} = \overline{MN}$ w.z.b.w.

zu c)



Werden die Punkte M und N an der Winkelhalbierenden w_3 gespiegelt, entstehen die Punkte M' und N'. Die Dreiecke $\Delta MIN'$ und $\Delta IM'N$ sind kongruent. Die eingezeichneten Winkel bei den Punkten M, M' und C haben die Größe von $\alpha = 2 \cdot \gamma$. Damit verlaufen die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{M'N'}$ parallel zueinander, $\overline{AB} \parallel \overline{M'N'}$. Die Winkel γ und δ bei I sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Die Dreiecke $\Delta BM'I$ und $\Delta AIN'$ sind infolgedessen gleichschenklig.

Damit ist $\quad a_2 = p'$,

und mit $p' = p \quad a_2 = p \quad$ ...(1),

sowie $\quad b_2 + b_3 = q'$,

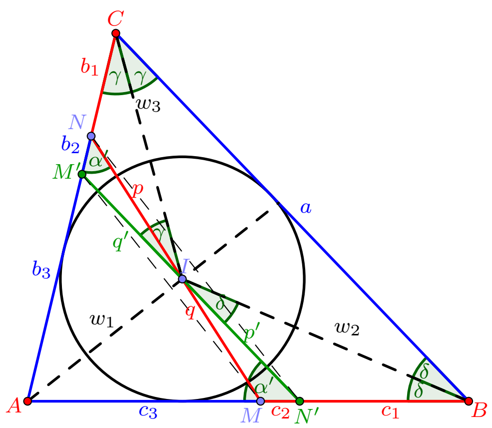
mit $q' = q \quad b_2 + b_3 = q \quad$ ...(2),

(1)+(2) $\quad a_2 + b_2 + b_3 = p + q$,

mit $b_3 = a_3$, $\quad a_2 + b_2 + a_3 = p + q$,

mit $a_2 + a_3 = \overline{CN} \quad \overline{AM} + \overline{CN} = \overline{MN}$ w.z.b.w.

zu d)



Werden die Punkte M und N an der Winkelhalbierenden w_1 gespiegelt, entstehen die Punkte M' und N'. Die Dreiecke $\Delta MN'I$ und $\Delta INM'$ sind kongruent. Die eingezeichneten Winkel bei den Punkten N, N' und B haben die Größe von $\alpha = 2 \cdot \delta$. Damit verlaufen die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{M'N'}$ parallel zueinander, $\overline{BC} \parallel \overline{M'N'}$. Die Winkel γ und δ bei I sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Die Dreiecke $\Delta BIN'$ und $\Delta CM'I$ sind infolgedessen gleichschenklig.

Damit ist	$c_1 = p'$,	
und mit $p' = p$	$c_1 = p$	...(1),
sowie	$b_1 + b_2 = q'$,	
mit $q' = q$	$b_1 + b_2 = q$	...(2),
(1)+(2)	$c_1 + b_1 + b_2 = p + q$,	
mit $b_2 = c_2$,	$c_1 + b_1 + c_2 = p + q$,	
mit $c_1 + c_2 = \overline{BM}$	$\overline{BM} + \overline{CN} = \overline{MN}$ w.z.b.w.	