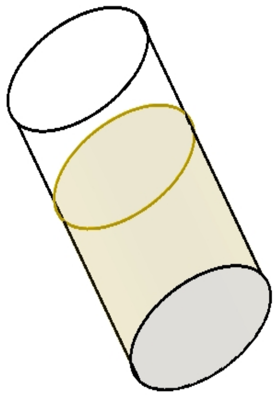
Minimaler Drehwinkel einer schräggestellten Bierdose

Ab welchem Drehwinkel kann eine teilweise mit Bier gefüllte Dose angekippt stehen, wenn die gesamte Grundfläche der Dose mit Bier bedeckt bleiben soll?

Angaben zur Bierdose:	Höhe: $H = 115\ mm$,	Masse der leeren Dose: $m_l = 26\ g$,
		Fassungsvermögen: $V = 330\ ml$,
	Radius der Dose: $r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot H}}$,	$r = 3.022\ cm$.
Angaben zum Bier:	Biermenge: V_B,	Bierhöhe: $h = \frac{V_B}{\pi \cdot r^2}$.

Die Dose wird idealisiert als gerader Kreiszylinder angenommen.

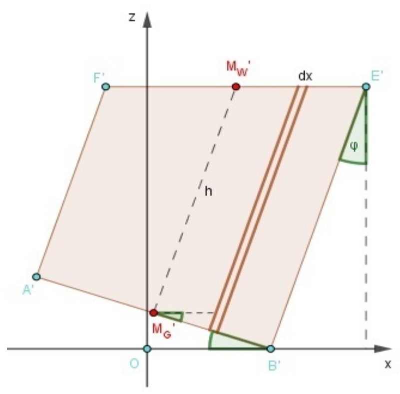


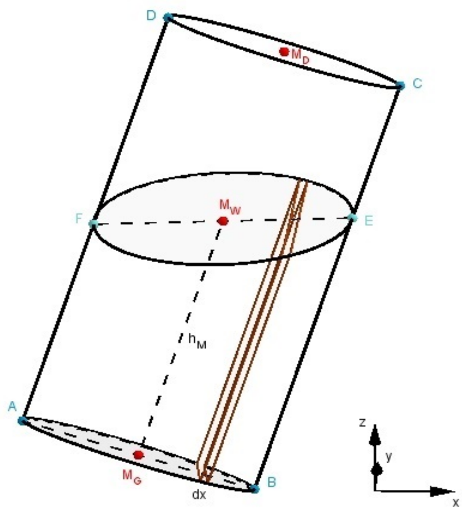
Idee der Aufgabe in Bezug auf die Fernsehsendung „Wer weiß denn sowas?“ vom 28.04.2020

Lösung

Die Bierdose kann dann angekippt stehen bleiben, wenn der gemeinsame Schwerpunkt von Dose und Bier senkrecht über dem Drehpunkt liegt.

Zunächst soll nur der Volumenschwerpunkt des Bieres bestimmt werden. Er ist das gewogene Mittel aller Biervolumenelemente. Die Dose wird im Punkt B um die y-Achse und den Winkel φ gedreht, das Biervolumen in infinitesimal kleine Scheiben der Breite dx zerlegt. Die Ausgangsbierhöhe sei $h = \overline{M_G M_W}$, es ist die konstant bleibende Strecke, die den Mittelpunkt der Grundfläche der Dose mit den Mittelpunkt der elliptischen Bieroberfläche verbindet. Als Symmetrieebene dient die bei der Drehung entstehende trapezförmige Schnittfläche $\square A', B', E', F'$.





Das Volumen dV einer Bierscheibe beträgt $\quad dV = 2 \cdot y \cdot z \cdot dx$

mit $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $\quad dV = 2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot z \cdot dx, \qquad ...(1)$

und $z = h + x \cdot tan\ \varphi$ $\quad dV = 2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot (h + x \cdot tan\ \varphi) \cdot dx \qquad ...(2).$

Mit (2) beträgt das Biervolumen $\quad V_B = 2 \cdot \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot (h + x \cdot tan\ \varphi) \cdot dx,$

$$V_B = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Das Ergebnis kann auch ohne Rechnung bestimmt werden. In den Tafeln findet man die Formel $V = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{h_1 + h_2}{2}$ für einen schräg abgeschnittenen Zylinder. Beim Ziehen einer Parallelen zur Strecke $\overline{FE}$ durch M_G passt das rechts abgeschnittene Volumenelement genau auf die Fehlstelle links von M_G. Die Fläche in der Symmetrieebene verändert sich zu einem Parallelogramm. Die Seiten $\overline{AF}$ und $\overline{BE}$ werden zu h, die, in $V = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{h+h}{2}$ eingesetzt, $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ ergeben.
Die Koordinaten für den Bierschwerpunkt $S_{B_0}(x_{B_0} \mid y_{B_0} \mid z_{B_0})$ errechnen sich aus den Mittelwerten der Schwerpunkte der x-, y- und z-Werte aller Bierscheiben. Dabei ist $x_{B_0} = x$, y_{B_0} befindet sich in der Symmetrieebene, so dass $y_{B_0} = 0$ und z_{B_0} in halber Höhe jeder Scheibe, d.h. $z_{B_0} = \frac{z}{2}$.

Es ist $\quad x_{B_0} = \frac{1}{V} \cdot \int\limits_{-r}^{r} x \cdot dV, \qquad y_{B_0} = 0, \qquad z_{B_0} = \frac{1}{V} \cdot \int\limits_{-r}^{r} \frac{z}{2} \cdot dV.$

Für x_{B_0} gilt mit (2) $\quad x_{B_0} = \frac{1}{\pi \cdot r^2 \cdot h} \cdot \int\limits_{-r}^{r} x \cdot 2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot (h + x \cdot tan\ \varphi) \cdot dx, \qquad x_{B_0} = \frac{r^2 \cdot tan\ \varphi}{4 \cdot h}.$

Für z_{B_0} gilt mit (1) $\quad z_{B_0} = \frac{1}{\pi \cdot r^2 \cdot h} \cdot \int\limits_{-r}^{r} \frac{z}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot z \cdot dx,$

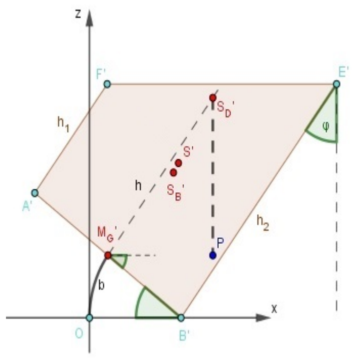
und mit (2) $\quad z_{B_0} = \frac{1}{\pi \cdot r^2 \cdot h} \cdot \int\limits_{-r}^{r} (h + x \cdot tan\ \varphi)^2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx, \qquad z_{B_0} = \frac{h}{2} + \frac{r^2 \cdot tan^2 \varphi}{8 \cdot h}.$

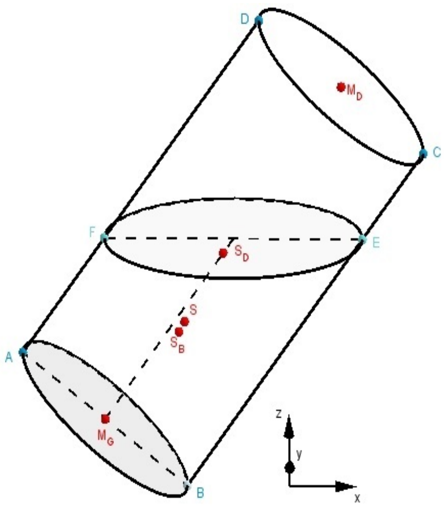
Die Koordinaten des Bierschwerpunktes sind $S_{B_0}\left(\frac{r^2 \cdot tan\ \varphi}{4 \cdot h} \mid 0 \mid \frac{h}{2} + \frac{r^2 \cdot tan^2 \varphi}{8 \cdot h}\right)$, wenn ein schräg abgeschnittener Zylinder mit der Grundfläche in der x-y-Ebene und M_G im Koordinatenursprung läge. Da die Dose um B gedreht ist, muss auch der Vektor $\overrightarrow{OS_{B_0}}$ an dem um φ gedrehen Punkt M_G beginnen. Der Punkt M_G hat die Koordinaten $M_G(r \cdot (1 - cos\ \varphi) \mid 0 \mid r \cdot sin\ \varphi)$. Dann ist mit der Drehmatrix $R_y(\varphi)$ um die y-Achse

$$\overrightarrow{OS_B} = \overrightarrow{OM_G} + R_y(\varphi) \cdot \overrightarrow{OS_{B_0}},$$

$$\overrightarrow{OS_B} = \begin{pmatrix} r \cdot (1 - cos\ \varphi) \\ 0 \\ r \cdot sin\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cos\ \varphi & 0 & sin\ \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\ \varphi & 0 & cos\ \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{r^2 \cdot tan\ \varphi}{4 \cdot h} \\ 0 \\ \frac{h}{2} + \frac{r^2 \cdot tan^2 \varphi}{8 \cdot h} \end{pmatrix}.$$

Nun muss der Schwerpunkt der leeren, schräg liegenden Dose ermittelt werden. Bei der Drehung um φ legt der Mittelpunkt M_G der Dosengrundfläche einen Weg auf dem Kreisbogen b zurück. Hinzu kommen die Koordinaten aus dem Dreieck $\Delta M_G P S_D$.





Es ist $\qquad x(S_D) = r - r \cdot cos\ \varphi + \frac{H}{2} \cdot sin\ \varphi$

und $\qquad z(S_D) = r \cdot sin\ \varphi + \frac{H}{2} \cdot cos\ \varphi,$

so dass $\qquad S_D\left(r \cdot (1 - cos\ \varphi) + \frac{H}{2} \cdot sin\ \varphi \mid 0 \mid r \cdot sin\ \varphi + \frac{H}{2} \cdot cos\ \varphi\right).$

Das gewichtete Mittel aus den Schwerpunkten der leeren Dose und dem Bier ergibt den Gesamtschwerpunkt $S(S_x \mid S_y \mid S_z)$,

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{m_l+m_B} \cdot \left(\begin{pmatrix} r \cdot (1 - cos\ \varphi) + \frac{H}{2} \cdot sin\ \varphi \\ 0 \\ r \cdot sin\ \varphi + \frac{H}{2} \cdot cos\ \varphi \end{pmatrix} \cdot m_l + \left(\begin{pmatrix} r \cdot (1 - cos\ \varphi) \\ 0 \\ r \cdot sin\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cos\ \varphi & 0 & sin\ \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\ \varphi & 0 & cos\ \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{r^2 \cdot tan\ \varphi}{4 \cdot h} \\ 0 \\ \frac{h}{2} + \frac{r^2 \cdot tan^2 \varphi}{8 \cdot h} \end{pmatrix}\right) \cdot m_B\right).$$

Mit der Masse des Bieres $m_B = \rho_B \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ ist der Schwerpunkt S nur noch abhängig von h und φ.

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{m_l+\rho_B \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h} \cdot \left(\begin{pmatrix} r \cdot (1 - cos\ \varphi) + \frac{H}{2} \cdot sin\ \varphi \\ 0 \\ r \cdot sin\ \varphi + \frac{H}{2} \cdot cos\ \varphi \end{pmatrix} \cdot m_l + \left(\begin{pmatrix} r \cdot (1 - cos\ \varphi) \\ 0 \\ r \cdot sin\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cos\ \varphi & 0 & sin\ \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\ \varphi & 0 & cos\ \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{r^2 \cdot tan\ \varphi}{4 \cdot h} \\ 0 \\ \frac{h}{2} + \frac{r^2 \cdot tan^2 \varphi}{8 \cdot h} \end{pmatrix}\right) \cdot \rho_B \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h\right),$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} \frac{m_l \cdot \left(r \cdot (1-cos\ \varphi)+\frac{1}{2} \cdot H \cdot sin\ \varphi\right)+\frac{1}{8} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot \left(8 \cdot h \cdot r-8 \cdot h \cdot r \cdot cos\ \varphi+sin\ \varphi \cdot \left(4 \cdot h^2+2 \cdot r^2+r^2 \cdot tan^2\varphi\right)\right)}{m_l+h \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho} \\ 0 \\ \frac{\frac{1}{2} \cdot cos\ \varphi \cdot (H \cdot m_l+h^2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho)+sin\ \varphi \cdot \left(m_l \cdot r+h \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho-\frac{1}{8} \cdot \pi \cdot r^4 \cdot \rho \cdot tan\ \varphi\right)}{m_l+h \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho} \end{pmatrix}.$$

Damit der Schwerpunkt S senkrecht über dem Punkt B liegt, muss

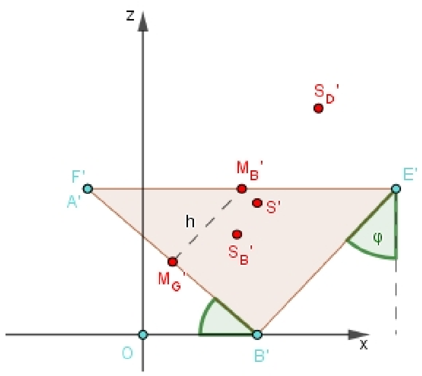
$S_x = r, \qquad \frac{m_l \cdot \left(r \cdot (1-cos\ \varphi)+\frac{1}{2} \cdot H \cdot sin\ \varphi\right)+\frac{1}{8} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot \left(8 \cdot h \cdot r-8 \cdot h \cdot r \cdot cos\ \varphi+sin\ \varphi \cdot \left(4 \cdot h^2+2 \cdot r^2+r^2 \cdot tan^2\varphi\right)\right)}{m_l+h \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho} = r,$

vereinfacht $\qquad \frac{4 \cdot H \cdot m_l+2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (2 \cdot h^2+r^2) \cdot \rho+\pi \cdot r^4 \cdot \rho \cdot tan^2\varphi}{m_l+h \cdot \pi \cdot r^2 \rho} = 8 \cdot r \cdot cot\ \varphi \qquad$ ...(3).

Mit (3) liefert die Nullstelle der Funktion

$$f(\varphi) = \frac{4 \cdot H \cdot m_l+2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (2 \cdot h^2+r^2) \cdot \rho+\pi \cdot r^4 \cdot \rho \cdot tan^2\varphi}{m_l+h \cdot \pi \cdot r^2 \rho} - 8 \cdot r \cdot cot\ \varphi \qquad \text{...(4)}$$

den Drehwinkel, bei dem der Schwerpunkt S genau über dem Drehpunkt B liegt.
Welche Werte kann φ annehmen, damit der Boden der Dose mit Bier bedeckt bleibt?
Das Trapez $\square A'B'E'F'$ wird im Grenzfall zu einem Dreieck $\Delta A'B'E'$, da die Punkte A' und F' zusammenfallen.

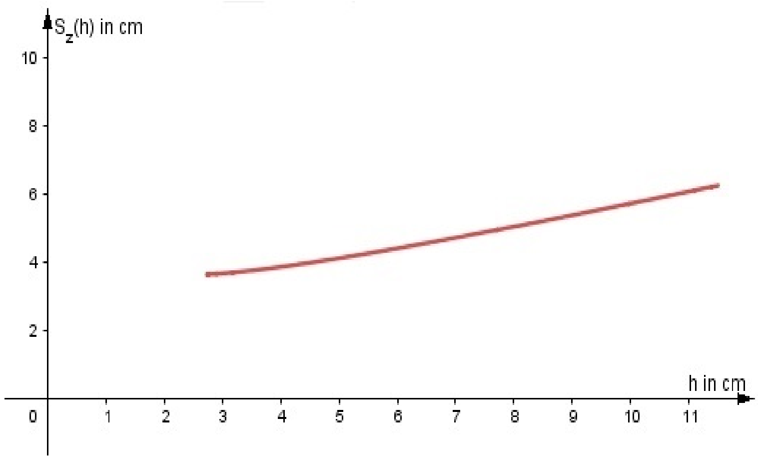


Es gilt im Dreieck $\Delta M_G' M_B' A'$ die Beziehung $\quad h = r \cdot tan\ \varphi \qquad$ ...(5).

(5) in (3) $\qquad \frac{4 \cdot H \cdot m_l+2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(2 \cdot (r \cdot tan\ \varphi)^2+r^2\right) \cdot \rho+\pi \cdot r^4 \cdot \rho \cdot tan^2\varphi}{m_l+r \cdot tan\ \varphi \cdot \pi \cdot r^2 \rho} = 8 \cdot r \cdot cot\ \varphi \qquad$ ...(6).

Alle gegebenen Werte werden eingesetzt und (6) nach φ umgestellt.
Das Ergebnis ist $\varphi = 42{,}12409°$, was einer Bierhöhe von $h_{min} = 2{,}73314\ cm$ entspricht.
Zusammenfassung:
Wenn die Grundfläche einer Dose mit Bier bedeckt sein soll, kann ab einem Drehwinkel von $\varphi = 42{,}12409°$ und einer Mindestbierfüllhöhe von $h_{min} = 2{,}73314\ cm$ die Bierdose angekippt stehen, da sich der Schwerpunkt S (im zweidimensionalen Bild S') genau über dem Drehpunkt befindet. Alle Winkel (Nullstellen von $f(\varphi)$) können in (3) eingesetzt werden, um die Bierhöhe h zu ermitteln. Sämtliche Werte sind nun gegeben, damit die Höhe des Schwerpunktes S_z über der x-y-Ebene errechnet werden kann.

Einige Werte:	Bierhöhe h in cm	Drehwinkel φ in °	Schwerpunkthöhe S_z in cm
	2,73314	42,12409	3,65916
	3,0	42,36718	3,69252
	3,5	42,42221	3,77689
	4,0	42,07551	3,88242
	4,5	41,43733	4,00324
	5,0	40,59177	4,13547
	5,5	39,60390	4,27643
	6,0	38,52408	4,42423
	7,0	36,23418	4,73515
	8,0	33,93040	5,06077
	9,0	31,72396	5,39664
	10,0	29,66718	5,73993
	11,0	27,77863	6,08878
	11,5	26,89794	6,26487



Ausblick: Um eine noch kleinere Schwerpunkthöhe zu finden, bei der die Dose schräg stehen kann, muss das Volumen eines „Hufes“ bestimmt werden, da das Bier dann nicht mehr die gesamte Dosengrundfläche bedeckt. Die Lösungen werden sicher nicht einfacher.

Ich bedanke mich bei Andreas Grieser, Greifswald, der mich bei den Rechnungen unterstützte und vor weiteren unnützen Betrachtungen bewahrte.