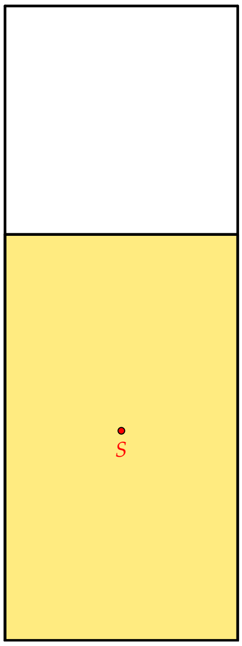
Standfestigkeit einer Bierdose

Bei welchem Flüssigkeitsstand h_B hat eine Bierdose die größte Standfestigkeit?

Angaben zur Bierdose: Volumen: $V = 500\ ml$, Masse der leeren Dose: $m_l = 20\ g$,
Höhe: $H = 168\ mm$, Masse einer vollen Dose: $m_v = 520\ g$.

Die Dose wird idealisiert als gerader Kreiszylinder angenommen.



Aufgabe aus „Mathematik ist überall“ - Taschenbuch von Dr. Norbert Herrmann vom 24.10.2012

Lösung

Der Schwerpunkt S_D der leeren Dose liegt bei $h_l = \frac{H}{2}$. Der Radius des Biervolumens ist $r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot H}}$, $r = 3{,}078\ cm$ und der Flächeninhalt der Grundfläche $A = \pi \cdot r^2$, $A = 29{,}762\ cm^2$.

Der Schwerpunkt S_B des „Bierzylinders“ hängt vom Flüssigkeitsstand ab.

Die „Biermasse“ beträgt $m_B = \rho \cdot V_B$, $m_B = \rho \cdot A \cdot h_B$ ...(1).

Das gewichtete Mittel aus den Schwerpunkten der leeren Dose und dem Bier ergibt den Gesamtschwerpunkt.

Es ist $S = \frac{1}{m_l + m_B} \cdot \left(\frac{H}{2} \cdot m_l + \frac{h_B}{2} \cdot m_B\right)$, $S = \frac{H \cdot m_l + h_B \cdot m_B}{2 \cdot (m_l + m_B)}$ ...(2).

(1) in (2) $S\left(h_B\right) = \frac{H \cdot m_l + \rho \cdot A \cdot h_B^2}{2 \cdot \left(m_l + \rho \cdot A \cdot h_B\right)}$ ...(3),

$S'\left(h_B\right) = 0$ $0 = \frac{2 \cdot \rho \cdot A \cdot h_B \cdot 2 \cdot \left(m_l + \rho \cdot A \cdot h_B\right) - 2 \cdot \rho \cdot A \cdot \left(H \cdot m_l + \rho \cdot A \cdot h_B^2\right)}{4 \cdot \left(m_l + \rho \cdot A \cdot h_B\right)^2}$

vereinfacht $0 = 2 \cdot m_l \cdot h_B + 2 \cdot \rho \cdot A \cdot h_B^2 - H \cdot m_l - \rho \cdot A \cdot h_B^2$

$0 = h_B^2 + \frac{2 \cdot m_l}{\rho \cdot A} \cdot h_B - \frac{H \cdot m_l}{\rho \cdot A}$,

Zahlenwerte eingesetzt $h_{B_{1,2}} = -\frac{20\ g}{1\ \frac{g}{cm^3} \cdot 29{,}762\ cm^2} \pm \sqrt{0{,}4516\ cm^2 + \frac{16{,}8\ cm \cdot 20\ g}{29{,}762\ \frac{g}{cm}}}$

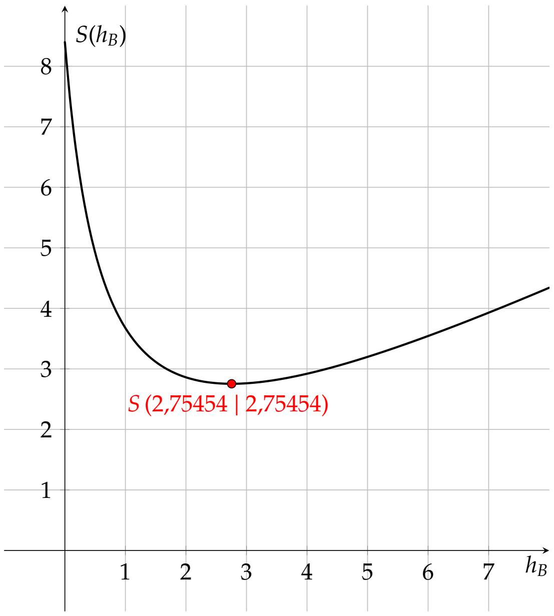
$h_{B_{1,2}} = -0{,}672\ cm \pm \sqrt{0{,}4516\ cm^2 + 11{,}2896\ cm^2}$

$h_{B_{1,2}} = -0{,}672\ cm \pm \sqrt{11{,}7411\ cm^2}$

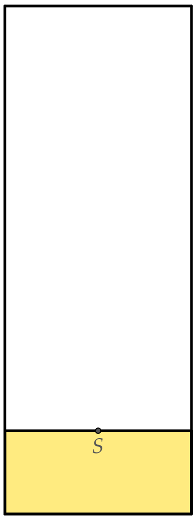
neg. Lösung entfällt $h_B = -0{,}672\ cm + 3{,}4265\ cm$, $\underline{\underline{h_B = 2{,}7545\ cm}}$.

Bei einer Bierfüllhöhe von $h_B \approx 2{,}75\ cm$ hat die Bierdose ihre größte Standfestigkeit.

Schneller ist man mit der graphischen Lösung von (3), indem das Minimum von $S(h_B)$ bestimmt wird.



Am Punkt S erkennt man, dass die Bierdose den sichersten Stand hat, wenn der Schwerpunkt der gesamten Dose direkt auf der Bieroberfläche liegt.



Zum Physiklehrbuch "Physik"von Gerthsen-Kneser-Vogel gibt es das Buch "Probleme aus der Physik, Aufgaben und Lösungen"(17. Auflage, 1994). Hier ist ein wunderbares Gedankenexperiment zum minimalen Schwerpunkt der Bierdose beschrieben.
„Es muß einen Füllungsgrad geben, wo der Schwerpunkt genau im Bierspiegel liegt. Der Verdacht liegt nahe, dass diese Koinzidenz etwas Besonderes bedeutet, vielleicht sogar die gesuchte tiefste Schwerpunktlage. Wir prüfen diese Vermutung und stellen uns dazu vor, das Bier sei gefroren, so daß man die Dose auf die Seite legen und den Schwerpunkt durch Balancieren auf einer Messerschneide bestimmen kann, sagen wir, mit dem gefüllten Teil der Dose nach rechts. Betrachten wir den Zustand, wo der Schwerpunkt im Bierspiegel liegt. Fügen wir etwas Bier hinzu, so wird die Dose links schwerer und kippt nach dort: Der Schwerpunkt ist nach links (d.h für die stehende Position nach oben) gerutscht. Nehmen wir etwas Bier weg, so wird sie rechts leichter und kippt ebenfalls nach links: Der Schwerpunkt ist wieder nach oben gewandert. Damit ist die Minimumeigenschaft des betrachteten Zustandes bewiesen.“