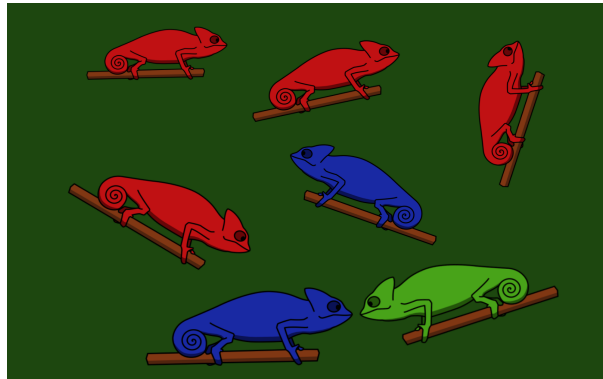


Chamäleons

In einem großen Terrarium leben ganz vergnügt einige Chamäleons. Und zwar 4 rote, 2 blaue und ein grünes. Diese Chamäleons haben eine merkwürdige Eigenschaft: Wann immer sich zwei Chamäleons verschiedener Farbe begegnen, nehmen beide die dritte Farbe an. Das heißt, wenn sich ein blaues und ein grünes Chamäleon begegnen, werden beide rot.

Frage: Kann es passieren, dass irgendwann alle Chamäleons die gleiche Farbe haben?

Zusatzfrage: Wie ist die Antwort, wenn zu Beginn 5 Chamäleons rot, 2 blau und eines grün ist?



Aufgabe von Professor Albrecht Beutelspachers, Knobelaufgabe Nr.13, zusammengestellt für „Mathematik online“ im Frühjahr 2020

Lösung

Zur ersten Frage: Ja, es kann passieren, wenn sich das ein blaues Chamäleon mit einem roten trifft, so werden beide grün. Damit sind drei rote, ein blaues und drei grüne Chamäleons im Terrarium. Treffens sich nun die drei roten und die drei grüne Chamäleons sind alle sieben Chamäleons blau. Sieben rote bzw. grüne Chamäleons kommen nicht zustande.

Es kann manchmal bis zu eintausend Begegnungen kommen bis alle Chamäleons blau sind. Ein Computerprogramm mit Python simuliert die Begegnungen. Der Quelltext lautet:

```
import random
b=2;g=1;r=4;lb=[];lg=[];lr=[];i=0
for i in range(1,b+1):lb.append(1);for i in range(1,g+1):lg.append(2);for i in range(1,r+1):lr.append(3)
while len(lb)<7 and len(lg)<7 and len(lr)<7:
    i +=1;alle=lb+lg+lr;random.shuffle(alle);auswahl=random.sample(alle,2)
    if auswahl[0] in lb and auswahl[1] in lg:    #in lb[0], lg[1] (1)
        lr.append(3);lr.append(3);lb.remove(auswahl[0]);lg.remove(auswahl[1])
    elif auswahl[0] in lb and auswahl[1] in lr:    #in lb[0], lr[1] (2)
        lg.append(2);lg.append(2);lb.remove(auswahl[0]);lr.remove(auswahl[1])
    if auswahl[1] in lb and auswahl[0] in lg:    #in lb[1], lg[0] (3)
        lr.append(3);lr.append(3);lb.remove(auswahl[1]);lg.remove(auswahl[0])
    elif auswahl[1] in lb and auswahl[0] in lr :    #in lb[1], lr[0] (4)
        lg.append(2);lg.append(2);lb.remove(auswahl[1]);lr.remove(auswahl[0])
    if auswahl[0] in lg and auswahl[1] in lr:    #in lg[0], lr[1] (5)
        lb.append(1);lb.append(1);lg.remove(auswahl[0]);lr.remove(auswahl[1])
    elif auswahl[1] in lg and auswahl[0] in lr:    #in lg[1], lr[0] (6)
        lb.append(1);lb.append(1);lg.remove(auswahl[1]);lr.remove(auswahl[0])
print("Nach ",i," Begegnungen gibt es ",len(lb)," blaue," ,len(lg)," grüne, und",len(lr)," rote Chamäleons.")
if len(lb)==7:print("Nur die blauen Chamäleons überleben.") elif len(lg)==7:print("Nur die grünen Chamäleons überleben.") elif len(lr)==7:print("Nur die roten Chamäleons überleben.")
```

Eine Untersuchung der positiven Differenzen der Anzahlen vor und nach einer Begegnung kann durchgeführt werden. Die Änderung der Farbe passiert nur beim Treffen von rb , rg oder bg .

es treffen sich	r	b	g	$N_r - N_b$	$N_r - N_g$	$N_b - N_g$
vorher	4	2	1	2	3	1
rb	3	1	3	2	0	2
rg	3	4	0	1	3	4
bg	6	1	0	5	6	1

Auffallend ist, dass in der Spalte $N_r - N_g$ nur Vielfache von 3 stehen.

Damit sich eine Chamäleonfarbe durchsetzt, müssen die Anzahlen in einer Zeile gleich sein. In der Zeile rb ist es die 3 bei r und g , so dass sich, wie oben beschrieben, b durchsetzen kann.

Wie kann es in der Zeile rg weitergehen, damit nur noch eine Farbe übrig bleibt?

es treffen sich	r	b	g	$N_r - N_b$	$N_r - N_g$	$N_b - N_g$
vorher	4	2	1	2	3	1
rg	3	4	0	1	3	4
rb	2	3	2	1	0	1

In der letzten Zeile rb ist es die 2 bei r und g , so dass sich auch hier b durchsetzen kann.

Wie kann es in der Zeile bg weitergehen, damit nur noch eine Farbe übrig bleibt?

es treffen sich	r	b	g	$N_r - N_b$	$N_r - N_g$	$N_b - N_g$
vorher	4	2	1	2	3	1
bg	6	1	0	5	6	1
rb	5	0	2	5	3	2
rg	4	2	1	2	3	1
rb	3	1	3	2	0	2

In der letzten Zeile rb ist es die 3 bei r und g , so dass sich hier wieder b durchsetzen kann.

Schlussfolgerungen

1. In den Spalten $N_r - N_g$ stehen nur Vielfache von „Drei“.
2. Sind bei den Anfangszahlen zweier Farben die Differenzen Vielfache von „Drei“, so setzt sich die dritte Farbe durch, hier: $N_r - N_g = 4 - 1$, blau setzt sich durch.
3. Zurück zur Zusatzfrage: Nur die Differenz $N_r - N_b = 5 - 2$ ist ein Vielfaches von „Drei“, es setzen sich demnach die grünen Chamäleons durch.
4. Bei einer Ausgangssituation von 6 roten, 2 blauen und einem grünen Chamäleon ist keine Differenz ein Vielfaches von „Drei“. Es werden niemals alle Chamäleons die gleiche Farbe haben.