

Die perfekte Dartscheibe

Der englische Zimmermann Brian Gamlin legte 1896 die Einteilung einer Dartscheibe fest. Er hatte versucht, zwei benachbarte Felder eine möglichst große Differenz zwischen ihren Punktzahlen zu geben. Bei einer Wettkampf-Dartscheibe beträgt die Summe aller Differenzen zweier benachbarter Felder 198.

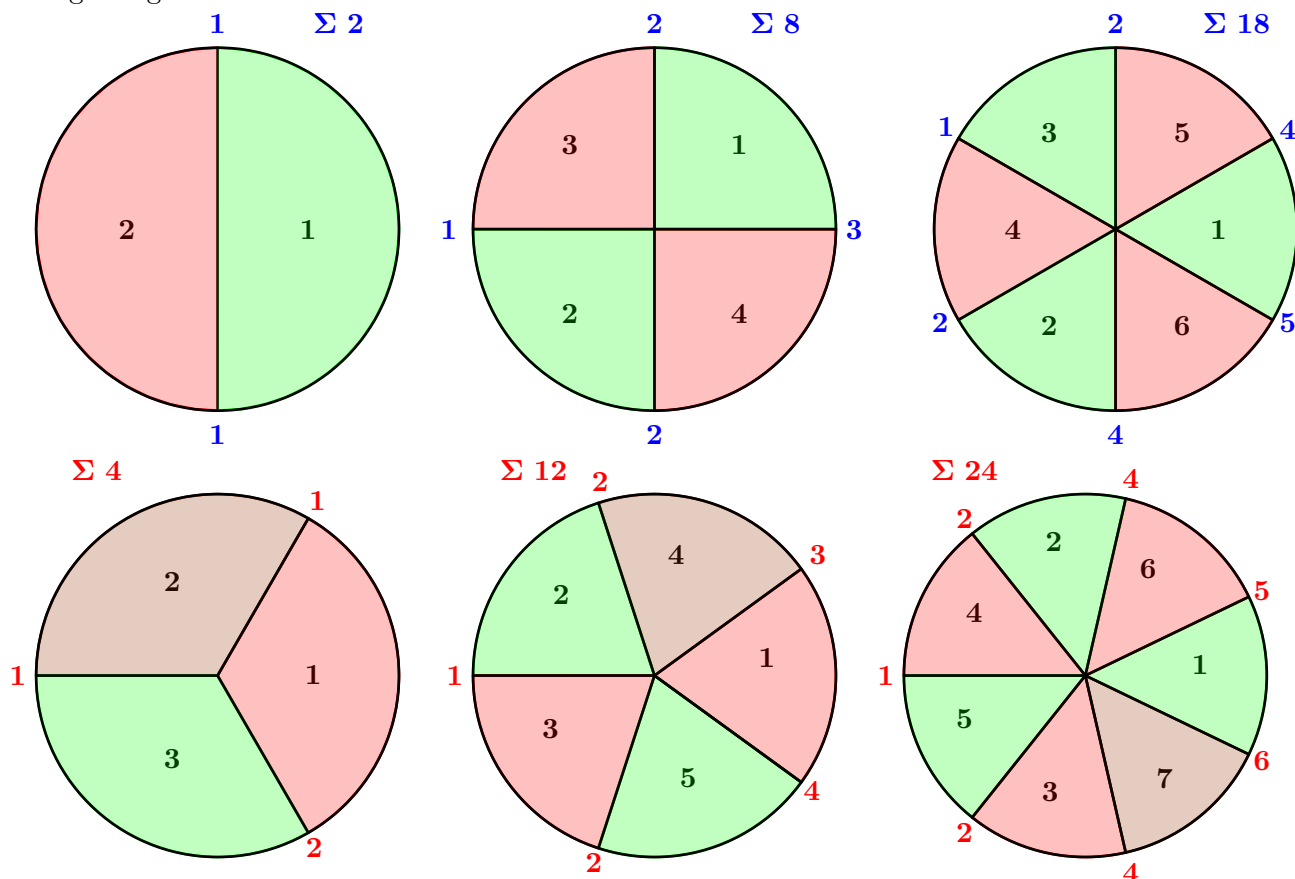
Wie groß ist die maximale Summe aller Differenzen einer Anordnung der Zahlen von 1 bis 20 auf einer perfekten Dartscheibe?



Nach einer Aufgabe aus „Bild der Wissenschaft“ von Heinrich Hemme, 1. Juli 2001

Lösung

Um eine Systematik in die Summe der Differenzen zu bekommen, werden n Dartfelder mit weniger Segmenten betrachtet.



Die maximalen Summen der Differenzen (blaue und rote Zahlen) werden zusammengefasst.

gerade Feldanzahl n_g	ungerade Feldanzahl n_u	Summe s der maximalen Differenzen
2		2
	3	4
4		8
	5	12
6		18
	7	24

Bei gerader Feldanzahl ist $s_g = \frac{1}{2} \cdot n_g^2$.

Bei ungerader Feldanzahl ist $s_u = \frac{1}{2} \cdot (n_u^2 - 1)$, $s_u = \frac{1}{2} \cdot (n_u - 1) \cdot (n_u + 1)$.

Bei einer ungeraden Anzahl von Dartfeldern ist die Summe der maximalen Differenz das geometrische Mittel aus den Summen der maximalen Differenzen der beiden benachbarten geraden Dartfelderanzahlen

$$s_u(n) = \sqrt{s_g(n-1) \cdot s_g(n+1)}.$$

Damit ist $s_g(20) = \frac{1}{2} \cdot 20^2$, $s_g(20) = 200$.

Die maximale Differenz einer Dartscheibe mit 20 Feldern beträgt 200.