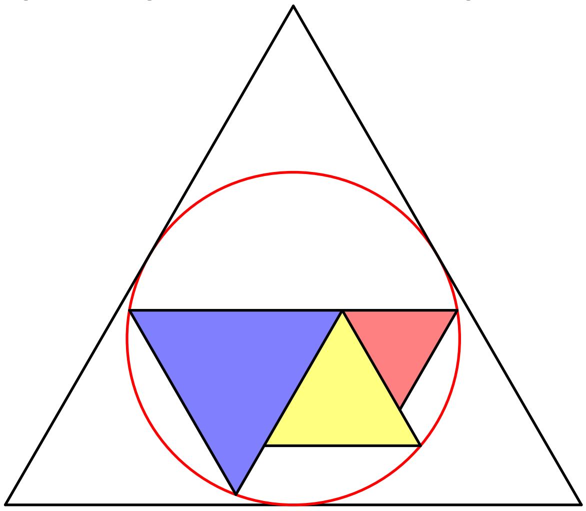
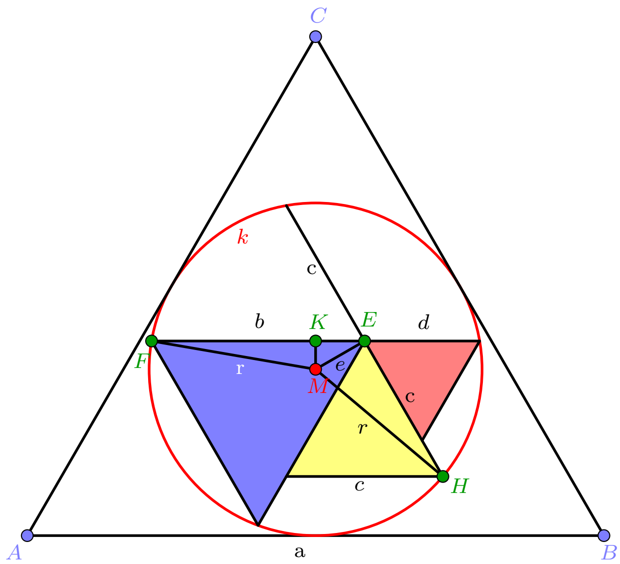
Drei Dreiecke und ein Kreis im gleichseitigen Dreieck

Alle vier Dreiecke sind gleichseitig. Welcher Bruchteil des größten Dreiecks ist farbig?



Aufgabe auf Twitter https://twitter.com/cshearer41/status/1320013669909016576 von Catriona Agg vom 24.Oktober 2020

Lösung

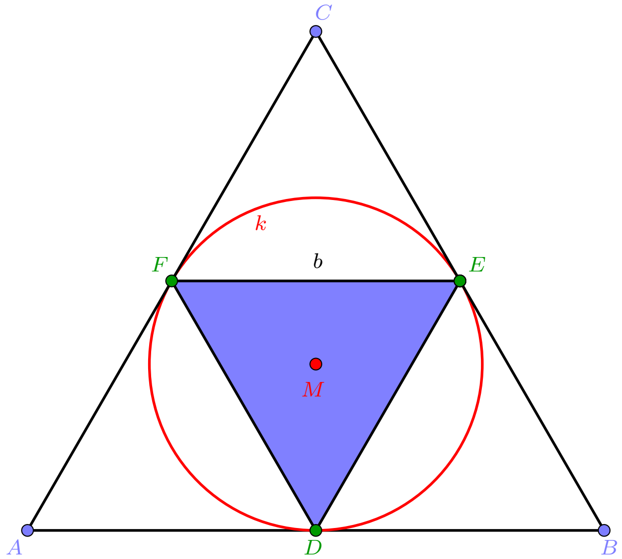


Die farbigen Dreiecke haben die Seitenlängen b, c und d. Der Mittelpunkt des Inkreises ist M. Die Strecke $e = \overline{ME}$ liegt auf der Winkelhalbieren durch A.

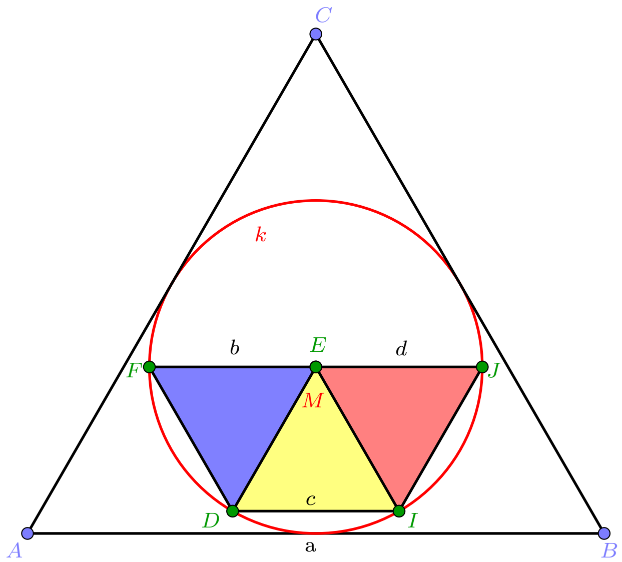
Im Dreieck ΔMEK ist	$sin\ 30° = \frac{\overline{MK}}{e}$,	$\overline{MK} = \frac{1}{2} \cdot e$	...(1).
Im Dreieck ΔMHE ist	$r^2 = e^2 + c^2$,	$e^2 = r^2 - c^2$	...(2).
Der Sehnensatz liefert	$b \cdot d = c^2$		...(3).
Im Dreieck ΔMKF ist	$r^2 = \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 + \overline{MK}^2$,	$4 \cdot r^2 = (b+d)^2 + e^2$,	
	$4 \cdot r^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot d + d^2 + e^2$,		
mit (2) und (3)	$4 \cdot r^2 = b^2 + 2 \cdot c^2 + d^2 + r^2 - c^2$,	$b^2 + c^2 + d^2 = 3 \cdot r^2$	...(4).
Die Flächeninhalte sind	$A_{blau} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot b^2$,	$A_{gelb} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot c^2$,	
	$A_{rot} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot d^2$.		
Der farbige Fläche beträgt	$A_{bunt} = A_{blau} + A_{gelb} + A_{rot}$,	$A_{bunt} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (b^2 + c^2 + d^2)$,	
mit (4)	$A_{bunt} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot r^2$		...(5).
Damit ist das Verhältnis	$\frac{A_{bunt}}{A_{ges}} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot r^2}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot r^2}$,	$\frac{A_{bunt}}{A_{ges}} = \frac{1}{4}$.	

Die Gleichung (4) schließt zwei Sonderfälle ein. Im ersten Fall liegt mit $c = 0$ und $d = 0$ die Seite b auf halber Höhe des großen Dreiecks, im zweiten Fall sind mit $b = c$, $b = d$ und $c = d$ alle Dreiecksseiten gleich dem Radius des Kreises $r = b$.

1. Wenn das blaue Dreieck stets vergrößert wird, so dass die beiden anderen Dreiecke immer kleiner werden bis ihre Fläche sogar 0 wird, besitzt das blaue Dreieck eine Fläche von $\frac{1}{4}$ der Gesamtfläche.



2. Wenn das blaue Dreieck verkleinert wird, so dass die beiden anderen Dreiecke größer werden bis alle farbigen Dreiecke die Seitenlänge r und damit den gleichen Flächeninhalt haben, entsteht ein gleichseitiges Trapez mit der Gesamtfläche
$A = \frac{2 \cdot r + r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot \sqrt{3}$, $A = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot r^2$, wie bei (5).



Vielen Dank an Jutta Gut, Wien, die wesentlich zur Lösungsfindung beitrug.