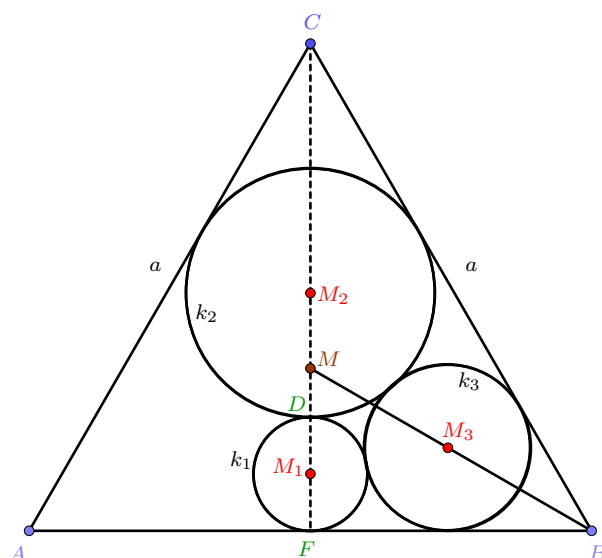


Drei Kreise im gleichseitigen Dreieck

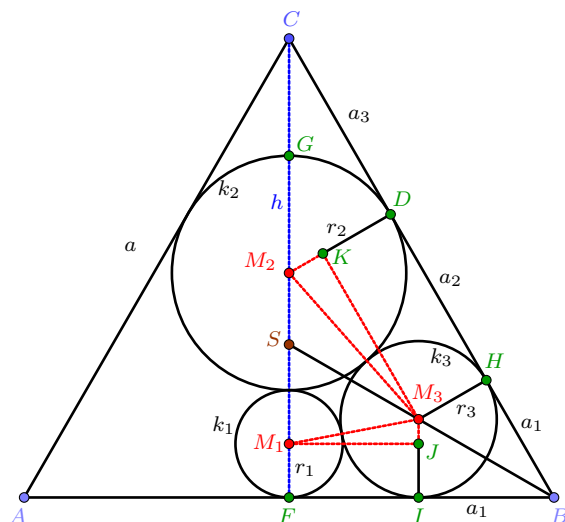
Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$ mit der Seitenlänge a . Auf der Höhenlinie $h_c = \overline{FC}$ liegen zwei Kreise k_1 und k_2 so übereinander, dass sie sich in einem Punkt D berühren. Der Kreis k_2 tangiert die Seiten \overline{AC} und \overline{BC} des gleichseitigen Dreiecks. Ein dritter Kreis k_3 liegt auf der Verbindungslinie \overline{MB} , wobei der Punkt M den Umkreismittelpunkt des Dreiecks darstellt. Der Kreis k_3 tangiert die Seiten \overline{AB} und \overline{BC} .

Welche Radien r_1 , r_2 und r_3 in Abhängigkeit von a besitzen die Kreise k_1 , k_2 und k_3 ?



Aufgabe von Peter G. Nischke, Berlin, 27. Januar 2001

Lösung



Die Höhe h_c beträgt	$h_c = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}.$...(1)
Im Dreieck $\triangle BHM_3$ ist	$\tan(30^\circ) = \frac{r_3}{a_1},$	$a_1 = \sqrt{3} \cdot r_3.$... (2)
Im Dreieck $\triangle DCM_2$ ist	$\tan(30^\circ) = \frac{r_2}{a_3},$	$a_3 = \sqrt{3} \cdot r_2$... (3)
und	$\sin(30^\circ) = \frac{r_2}{r_2 + \overline{CG}},$	$\overline{CG} = r_2.$... (4)
Mit (4) ist die Höhe	$h_c = 2 \cdot r_1 + 3 \cdot r_2,$	
mit (1)	$\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot r_1 + 3 \cdot r_2,$	$a = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot r_1 + r_2\right).$... (5)
Im Dreieck $\triangle M_3KM_2$ ist	$(r_2 - r_3)^2 + a_2^2 = (r_2 + r_3)^2,$	$\overline{-2 \cdot r_2 \cdot r_3 + a_2^2} = 2 \cdot r_2 \cdot r_3,$

$$\begin{array}{ll} \text{mit } a_2 = a - a_1 - a_3 & (a - a_1 - a_3)^2 = 4 \cdot r_2 \cdot r_3, \quad a - a_1 - a_3 = 2 \cdot \sqrt{r_2 \cdot r_3}, \\ \text{mit (2), (3)} & a = 2 \cdot \sqrt{r_2 \cdot r_3} + \sqrt{3} \cdot (r_2 + r_3). \end{array} \quad \dots(6)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Im Dreieck } \Delta M_1 J M_3 \text{ ist} & (r_3 - r_1)^2 + \overline{FI}^2 = (r_3 + r_1)^2, \\ \text{mit } \overline{FI} = \frac{a}{2} - a_1 & -2 \cdot r_1 \cdot r_3 + \left(\frac{a}{2} - a_1\right)^2 = 2 \cdot r_1 \cdot r_3, \\ \text{mit (2)} & \left(\frac{a}{2} - \sqrt{3} \cdot r_3\right)^2 = 4 \cdot r_1 \cdot r_3, \quad \underline{\underline{a = 4 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_3} + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r_3.}} \quad \dots(7) \end{array}$$

Die voneinander unabhängigen Gleichungen (5), (6) und (7) werden in ein CAS eingegeben. Mathematica liefert die Lösungen $r_1 = 0,10123 \cdot a$, $r_2 = 0,22119 \cdot a$ und $r_3 = 0,14755 \cdot a$.

Untersucht man die Lösungen mit dem CAS noch etwas genauer, entsteht

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{44} \cdot \left(20 - 7 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{72 \cdot \sqrt{3} - 113}\right) \cdot a, & r_2 &= \frac{1}{66} \cdot \left(18 \cdot \sqrt{3} - 20 - \sqrt{72 \cdot \sqrt{3} - 113}\right) \cdot a, \\ r_3 &= \frac{1}{66} \cdot (9 + 4 \cdot \sqrt{3}) \cdot \left(2 + \sqrt{4 \cdot \sqrt{3} - 5}\right) \cdot a. \end{aligned}$$

