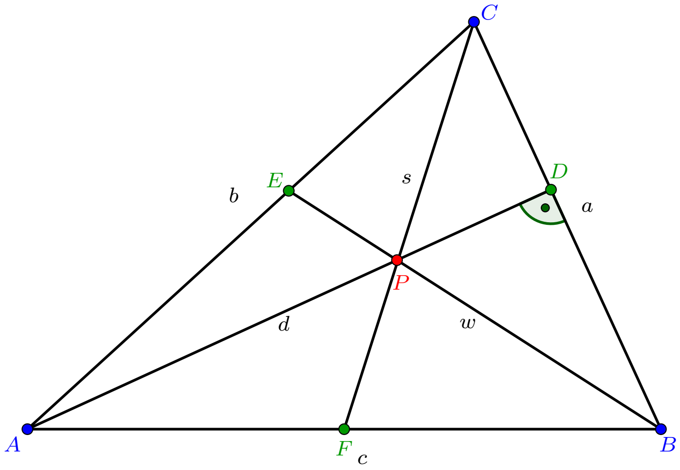
Drei Linien im Dreieck

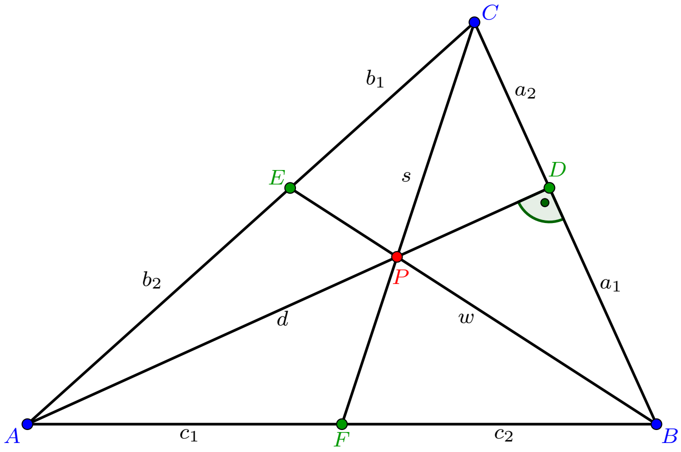
Es seien D, E, F Punkte auf den Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ und $\overline{AB}$ eines Dreiecks ΔABC derart, dass $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\overline{BE}$ die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$ und F der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist.
Man beweise, dass sich $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ dann und nur dann in einem Punkt P schneiden, wenn folgende Gleichung gilt: $a^2 \cdot (a-c) = \left(b^2 - c^2\right) \cdot (a+c)$.



Aufgabe aus Nationale Wettbewerbe, Republik Irland, 1999

Lösung

Teilt man die Seiten a, b und c des Dreiecks ein in a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 und c_2, so kann der **Satz von Ceva** (1647 bis 1734) angewandt werden:
„In einem Dreieck ABC seien $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ drei Ecktransversalen (also Verbindungsstrecken zwischen einer Ecke und einem Punkt auf der gegenüber liegenden Seite beziehungsweise deren Verlängerung), die sich in einem Punkt P innerhalb oder außerhalb des Dreiecks schneiden. Dann gilt: $a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = a_2 \cdot b_2 \cdot c_2$.*“* ...(1).



Nun ist $c_1 = c_2$, so dass (1) zu $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2$ wird. ...(2).
Für die Winkelhalbierende w gilt der **Winkelhalbierendensatz**:
„Die Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.“

Dann ist	$\frac{a}{c} = \frac{b_1}{b_2}$,		
mit (2)	$a_1 \cdot \frac{a}{c} = a_2$		...(3).
Weiterhin ist	$a_1 + a_2 = a$		...(4).
Aus (3) und (4) wird	$a_1 + a_1 \cdot \frac{a}{c} = a$,	$a_1 = \frac{a \cdot c}{a+c}$	...(5).
Im Dreieck ΔABD gilt:	$d^2 = c^2 - a_1^2$		...(6).
Im Dreieck ΔADC gilt:	$d^2 = b^2 - a_2^2$		...(7).
Mit (6) und (7) entsteht	$c^2 - b^2 = a_1^2 - a_2^2$,	$c^2 - b^2 = a \cdot (a_1 - a_2)$	...(8).
(3) in (8) liefert	$c^2 - b^2 = a \cdot \left(a_1 - a_1 \cdot \frac{a}{c}\right)$,	$\frac{c^2-b^2}{a} = a_1 \cdot \left(1 - \frac{a}{c}\right)$,	
	$a_1 = \frac{c^2-b^2}{a \cdot \left(1-\frac{a}{c}\right)}$		...(9).
Mit (5)=(9) entsteht	$\frac{a \cdot c}{a+c} = \frac{c^2-b^2}{a \cdot \left(1-\frac{a}{c}\right)}$,	$\frac{a^2 \cdot c}{a+c} = \frac{c^2-b^2}{\frac{c-a}{c}}$,	
	$\frac{a^2}{a+c} = \frac{b^2-c^2}{a-c}$,		
	$a^2 \cdot (a-c) = \left(b^2 - c^2\right) \cdot (a+c)$,	w.z.b.w.	