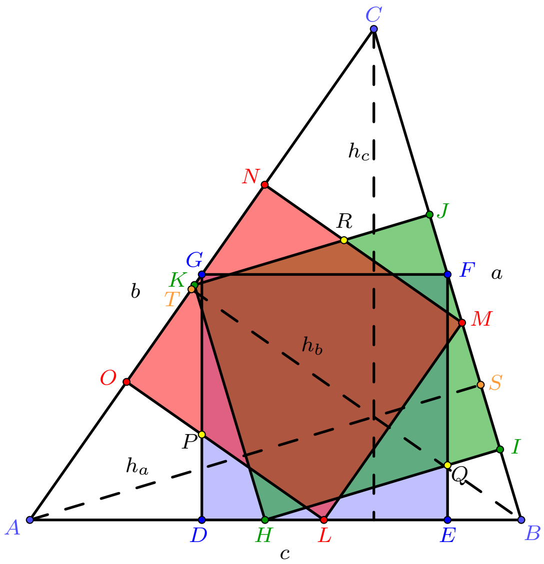
Drei Quadrate im Dreieck

Gegeben sind die Punkte $A(0|0)$, $B(10|0)$ und $C(7|10)$ eines Dreiecks. Diesem Dreieck werden drei Quadrate so einbeschrieben, dass die Seite eines Quadrats jeweils auf einer Grundseite des Dreiecks liegt.
Welche Fläche des Dreiecks wird nicht von den drei Quadraten überdeckt?



Aufgabe der Serie 56, Nr.668 von Thomas Jahre, Chemnitz, vom 19. März 2021

Lösung

Der Punkt A wird in den Koordinatenursprung gelegt. Die Seitenlänge des blauen Quadrats sei l_1, des grünen Quadrates l_2 und des roten Quadrates l_3. Die Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und C lautet $y = \frac{10}{7} \cdot x$, die Gerade h durch die Punkte B und C kann mit der Gleichung $y = -\frac{10}{3} \cdot x + \frac{100}{3}$ beschrieben werden. Es können die zwei Höhen des Dreiecks bestimmt werden. Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC beträgt mit $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

	$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10,$	$A_{\Delta ABC} = 50\ FE$	...(1).
Mit (1) und $h_a = \frac{2 \cdot A_{\Delta ABC}}{a}$	$h_a = \frac{2 \cdot 50}{\sqrt{10^2+3^2}},$	$h_a = \frac{100}{\sqrt{109}}$	...(2),
mit (1) und $h_b = \frac{2 \cdot A_{\Delta ABC}}{b}$	$h_b = \frac{2 \cdot 50}{\sqrt{10^2+7^2}},$	$h_b = \frac{100}{\sqrt{149}}$	...(3).
Nach dem Strahlensatz ist	$\frac{x_D}{l_1} = \frac{7}{10},$	$x_D = \frac{7}{10} \cdot l_1$	...(4),
wie auch	$\frac{10-x_E}{l_1} = \frac{3}{10},$	$x_E = 10 - \frac{3}{10} \cdot l_1$	...(5),
mit (4), (5), $x_E - x_D = l_1$	$10 - \frac{3}{10} \cdot l_1 - \frac{7}{10} \cdot l_1 = l_1,$	$\underline{\underline{l_1 = 5}}$	...(6).
$\Delta ABS \sim \Delta HBI$, so dass	$\frac{h_a}{10} = \frac{l_2}{10-x_H},$	$x_H = 10 - \frac{10 \cdot l_2}{h_a}$	...(7),
$\Delta ABC \sim \Delta AHK$, so dass	$\frac{10}{\sqrt{109}} = \frac{x_H}{l_2},$	$x_H = \frac{10}{\sqrt{109}} \cdot l_2$	...(8),
(7)=(8), mit (2)	$10 - \frac{10 \cdot l_2}{\frac{100}{\sqrt{109}}} = \frac{10}{\sqrt{109}} \cdot l_2,$	$10 - \frac{\sqrt{109}}{10} \cdot l_2 = \frac{10}{\sqrt{109}} \cdot l_2,$	
	$\sqrt{109} - \frac{109}{100} \cdot l_2 = l_2,$	$\underline{\underline{l_2 = \frac{100}{209} \cdot \sqrt{109}.}}$	
$\Delta ABT \sim \Delta ALO$, so dass	$\frac{h_b}{10} = \frac{l_3}{x_L},$	$x_L = \frac{10 \cdot l_3}{h_b}$	...(9),
$\Delta ABC \sim \Delta LBM$, so dass	$\frac{10}{\sqrt{149}} = \frac{10-x_L}{l_3},$	$x_L = 10 - \frac{10}{\sqrt{149}} \cdot l_3$	...(10),
(9)=(10), mit (3)	$\frac{10 \cdot l_3}{\frac{100}{\sqrt{149}}} = 10 - \frac{10}{\sqrt{149}} \cdot l_3,$	$\frac{\sqrt{149}}{10} \cdot l_3 = 10 - \frac{10}{\sqrt{149}} \cdot l_3,$	
	$l_3 = \frac{100}{\sqrt{149}} - \frac{100}{149} \cdot l_3,$	$\underline{\underline{l_3 = \frac{100}{249} \cdot \sqrt{149}.}}$	

Die Quadrate haben die Seitenlängen $l_1 = 5\ LE$, $l_2 = \frac{100}{209} \cdot \sqrt{109}\ LE$ und $l_3 = \frac{100}{249} \cdot \sqrt{149}\ LE$.
Um die noch nicht mit Quadraten abgedeckte Fläche zu bestimmen, müssen noch einige Punkte und Strecken bestimmt werden.

Mit (4) ist $\quad x_D = \frac{7}{10} \cdot 5, \quad x_D = \frac{7}{2} \quad ...(11),$

mit (5) ist $\quad x_E = 10 - \frac{3}{10} \cdot 5, \quad x_E = \frac{17}{2} \quad ...(12),$

mit (8) ist $\quad x_H = \frac{10}{\sqrt{109}} \cdot \frac{100}{209} \cdot \sqrt{109}, \quad x_H = \frac{1000}{209} \quad ...(13),$

mit (10) ist $\quad x_L = 10 - \frac{10}{\sqrt{149}} \cdot \frac{100}{249} \cdot \sqrt{149}, \quad x_L = \frac{1490}{249} \quad ...(14).$

Eine zu g senkrechte Gerade n_1 durch die Punkte L und O hat die Gleichung $y = -\frac{7}{10} \cdot (x - x_L)$.

$g \cap n_1 = x_O$ mit (14) $\quad \frac{10}{7} \cdot x_O = -\frac{7}{10} \cdot (x_O - \frac{1490}{249}), \quad \frac{149}{70} \cdot x_O = \frac{10430}{2490},$

$x_O = \frac{490}{249}, \quad y_O = \frac{700}{249},$

$n_1 \cap (x = x_D) = y_P$ mit (14) $\quad y_P = -\frac{7}{10} \cdot (\frac{7}{2} - \frac{1490}{249}), \quad y_P = \frac{8659}{4980}.$

Eine zu h senkrechte Gerade n_2 durch die Punkte H und I hat die Gleichung $y = \frac{3}{10} \cdot (x - x_H)$.

$h \cap n_2 = x_I$ mit (13) $\quad -\frac{10}{3} \cdot x_I + \frac{100}{3} = \frac{3}{10} \cdot (x_I - \frac{1000}{209}), \quad -\frac{109}{30} \cdot x_I = -\frac{21800}{627},$

$x_I = \frac{2000}{209}, \quad y_I = \frac{300}{209},$

$n_2 \cap (x = x_E) = y_Q$ mit (14) $\quad y_Q = -\frac{3}{10} \cdot (\frac{17}{2} - \frac{1000}{209}), \quad y_Q = \frac{4659}{4180}.$

Die Koordinaten der Punkte N und J werden mit Vektoren bestimmt.

Es ist $\quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AO} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \cdot l_3, \quad \overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} \frac{490}{249} \\ \frac{700}{249} \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}}{\sqrt{149}} \cdot \frac{100}{249} \cdot \sqrt{149},$

$\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} \frac{490}{249} \\ \frac{700}{249} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{700}{249} \\ \frac{1000}{249} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} \frac{1190}{249} \\ \frac{1700}{249} \end{pmatrix},$

weiterhin ist $\quad \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} + \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} \cdot l_2, \quad \overrightarrow{AJ} = \begin{pmatrix} \frac{2000}{209} \\ \frac{300}{209} \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}}{\sqrt{109}} \cdot \frac{100}{209} \cdot \sqrt{109},$

$\overrightarrow{AJ} = \begin{pmatrix} \frac{2000}{209} \\ \frac{300}{209} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-300}{209} \\ \frac{1000}{209} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AJ} = \begin{pmatrix} \frac{1700}{209} \\ \frac{1300}{209} \end{pmatrix}.$

Fehlen nur noch die Koordinaten des Punktes R, der Schnittpunkt zweier Normalen n_3 durch die Punkte N und M sowie n_4 durch die Punkte K und J ist. Die Geradengleichung

von n_3 lautet $\quad y - y_N = -\frac{7}{10} \cdot (x - x_N), \quad y - \frac{1700}{249} = -\frac{7}{10} \cdot (x - \frac{1190}{249}),$

und von n_4 $\quad y - y_J = \frac{3}{10} \cdot (x - x_N), \quad y - \frac{1300}{209} = \frac{3}{10} \cdot (x - \frac{1700}{209}),$

$n_3 \cap n_4 = R$ $\quad -\frac{1300}{209} + \frac{1700}{249} = x_R - \frac{510}{209} - \frac{833}{249}, \quad x_R = -\frac{790}{209} + \frac{2533}{249}$

$x_R = \frac{332687}{52041} \quad y_R = \frac{988387}{173470}.$

Die Punkte $A(0|0)$, $D\left(\frac{7}{2}|0\right)$, $P\left(\frac{7}{2}|\frac{8659}{4980}\right)$ und $O\left(\frac{490}{249}|\frac{700}{249}\right)$ begrenzen das Viereck $\square ADPO$, die Punkte $E(\frac{17}{2}|0)$, $B\,(10|0)$, $I\left(\frac{2000}{209}|\frac{300}{209}\right)$ und $Q\left(\frac{17}{2}|\frac{4659}{249}\right)$ das Viereck $\square EBIQ$ und die Punkte $N(\frac{1190}{249}|\frac{1700}{249})$, $R\left(\frac{332687}{52041}|\frac{988387}{173470}\right)$, $J\left(\frac{1700}{209}|\frac{1300}{209}\right)$ und $C\,(7|10)$ das Viereck $\square NRJC$.

Die Summe aus den sechs Dreiecken ΔADP, ΔAPO, ΔEBQ, ΔBIQ, ΔNRC und ΔRJC ergeben die nicht von den Quadraten bedeckte Fläche. Zur Berechnung des Flächeninhalt eines Dreiecks wird die Gleichung benutzt $A_D = \frac{1}{2} \cdot \left| det\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right|$, $A_D = \frac{1}{2} \cdot |a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x|$.

$A_{\Delta ADP} = A_1, \quad A_1 = \frac{1}{2} \cdot \left| det\left(\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AP}\right)\right|, \quad A_1 = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{7}{2} \cdot \frac{8659}{4980}\right|, \quad A_1 = 3{,}04282,$

$A_{\Delta APO} = A_2, \quad A_2 = \frac{1}{2} \cdot \left| det\left(\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AO}\right)\right|, \quad A_2 = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{7}{2} \cdot \frac{700}{249} - \frac{8659}{4980} \cdot \frac{490}{249}\right|, \quad A_2 = 3{,}20886,$

$A_{\Delta EBQ} = A_3, \quad A_3 = \frac{1}{2} \cdot \left| det\left(\overrightarrow{EB} \times \overrightarrow{EQ}\right)\right|, \quad A_3 = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{3}{2} \cdot \frac{4659}{4180}\right|, \quad A_3 = 0{,}83594,$

$A_{\Delta BIQ} = A_4, \quad A_4 = \frac{1}{2} \cdot \left| det\left(\overrightarrow{BI} \times \overrightarrow{BQ}\right)\right|, \quad A_4 = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{90}{209} \cdot \frac{4659}{4180} - \frac{300}{209} \cdot \frac{3}{2}\right|, \quad A_4 = 0{,}83657,$

$A_{\Delta NRC} = A_5, \quad A_5 = \frac{1}{2} \cdot \left| det\left(\overrightarrow{CN} \times \overrightarrow{CR}\right)\right|, \quad A_5 = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{553}{249} \cdot \frac{746313}{173470} - \frac{790}{249} \cdot \frac{31600}{52041}\right|, \quad A_5 = 3{,}81416,$

$A_{\Delta RJC} = A_6, \quad A_6 = \frac{1}{2} \cdot \left| det\left(\overrightarrow{CR} \times \overrightarrow{CJ}\right)\right|, \quad A_6 = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{31600}{52041} \cdot \frac{790}{209} + \frac{746313}{173470} \cdot \frac{237}{209}\right|, \quad A_6 = 3{,}58692.$

Summe der sechs Flächen $\quad A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6, \quad \underline{\underline{A = 15{,}32528\ FE}}.$