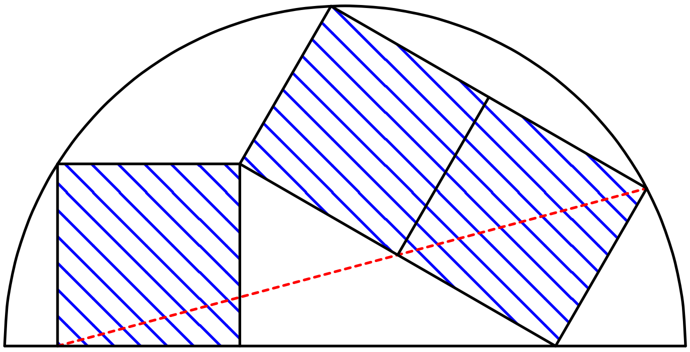
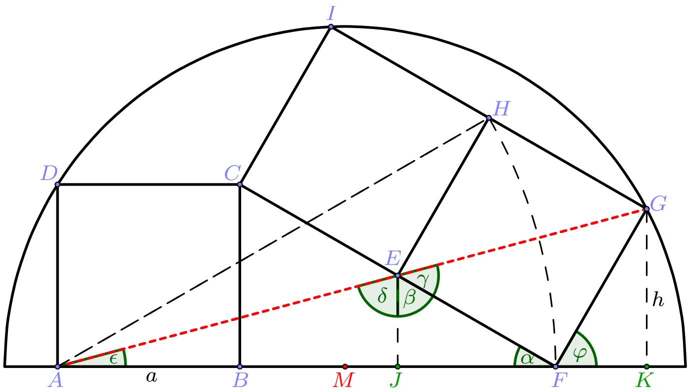
Drei Quadrate im Halbkreis

Drei gleiche Quadrate sind in einen Halbkreis eingeschrieben. Drei ihrer Spitzen liegen auf einem Halbkreis, drei weitere auf dem Durchmesser, wie in der Zeichnung gezeigt.
Es ist zu beweisen, dass die gestrichelte Linie gerade ist.



Aufgabe von Konstantin Knop, Sankt Petersburg, vom 03. November 2021

Lösung



Der Punkt A wird in den Koordinatenursprung gelegt. Die Dreiecke ΔAEH und ΔAFE sind nach dem Kongruenzsatz *sws* kongruent. Entsprechend dem 2.Teil des Strahlensatzes

ist	$\frac{\overline{JE}}{a} = \frac{a}{2\cdot a}$,	$\overline{JE} = \frac{a}{2}$.	
Im Dreieck ΔJFE ist	$sin\ \alpha = \frac{a}{2\cdot a}$,	$\alpha = 30°$,	
damit ist	$\beta = 180° - 30° - 90°$,	$\beta = 60°$,	
Der Winkel γ halbiert das Quadrat $\square FGHE$		$\gamma = 45°$,	
und der Winkel δ ist	$\delta = 180° - 60° - 45°$,	$\delta = 75°$,	
dann ist im Dreieck ΔAFE	$\epsilon = 180° - 30° - (75° + 60°)$,	$\epsilon = 15°$.	
Die Geradengleichung g durch die Punkte A, E lautet		$y = tan\ \epsilon \cdot x$,	
mit $tan\ 15° = 2 - \sqrt{3}$	$y = tan\ 15° \cdot x$,	$y = (2 - \sqrt{3}) \cdot x$.	
Es muss noch gezeigt werden, dass der Punkt G auf der Geraden g liegt.			
Im Dreieck ΔFKG ist	$\varphi = 180° - 30° - 90°$	$\varphi = 60°$.	
Es ist	$h = a \cdot sin\ \varphi$,	$h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a$,	...(1)
und weiterhin	$cos\ \varphi = \frac{\overline{FK}}{a}$,	$\overline{FK} = \frac{a}{2}$	...(2),
Im Dreieck ΔBFC ist	$tan\ \alpha = \frac{a}{\overline{BF}}$,	$\overline{BF} = \sqrt{3} \cdot a$	...(3).
Mit (2) und (3) ist	$\overline{AK} = a + \sqrt{3} \cdot a + \frac{a}{2}$,	$\overline{AK} = \frac{3}{2} \cdot a + \sqrt{3} \cdot a$	...(4).

Die Koordinaten von G sind bestimmt, sie lauten mit (1) und (4) $G\left(\frac{3}{2} \cdot a + \sqrt{3} \cdot a \mid \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a\right)$.

$G \in g$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a = (2 - \sqrt{3}) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot a + \sqrt{3} \cdot a\right)$,	
	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = 3 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} - 3$,	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ w.A.