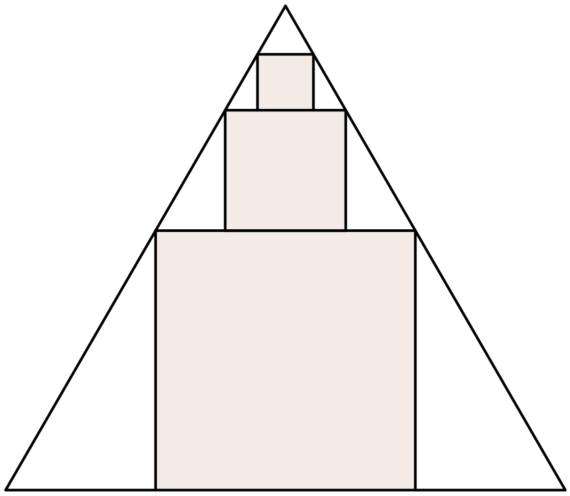
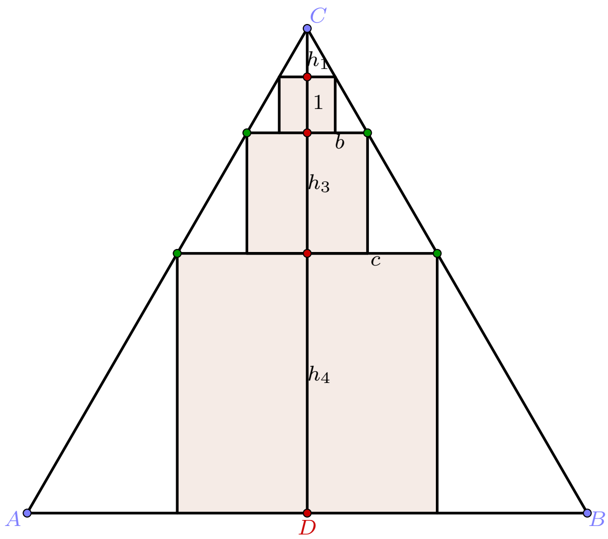
Drei Quadrate im gleichseitigen Dreieck

Drei Quadrate sind entsprechend der Abbildung einem gleichseitigen Dreieck einbeschrieben. Das oberste Quadrat hat eine Seitenlänge von 1 LE. Welche Seitenlänge a besitzt das Dreieck?



Aufgabe von Dr. Eugen Willerding vom 27. April 2022

Lösung



Die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ΔABC sei a. Im Dreieck ΔBCD ist der Winkel $\sphericalangle BCD = \alpha$, $\alpha = 30°$, $tan\ \alpha = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$.

Strecke h_1:	$h_1 = \frac{1}{2 \cdot tan\ \alpha}$,	$h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	...(1),
Strecke b mit (1):	$tan\ \alpha = \frac{b}{h_1+1}$,	$b = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$,	
$h_3 = 2 \cdot b$	$b = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$,	$h_3 = 1 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$	...(2),
Strecke c mit (2):	$tan\ \alpha = \frac{c}{h_1+1+h_2}$,	$c = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 1 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\right)$,	
$h_4 = 2 \cdot c$	$c = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$,	$h_4 = \frac{7}{3} + \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}$	...(3),
Höhe h mit (1), (2), (3)	$h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$,	$h = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 1 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} + \frac{7}{3} + \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3}$,	
	$h = \frac{13}{3} + \frac{5}{2} \cdot \sqrt{3}$		...(4),
Seitenlänge a mit (4)	$tan\ \alpha = \frac{a}{2 \cdot h}$,	$a = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{13}{3} + \frac{5}{2} \cdot \sqrt{3}\right)$,	
	$\underline{\underline{a = \frac{26}{9} \cdot \sqrt{3} + 5.}}$		

Das Dreieck ΔABC hat eine Seitenlänge von $a \approx 10\ LE$.