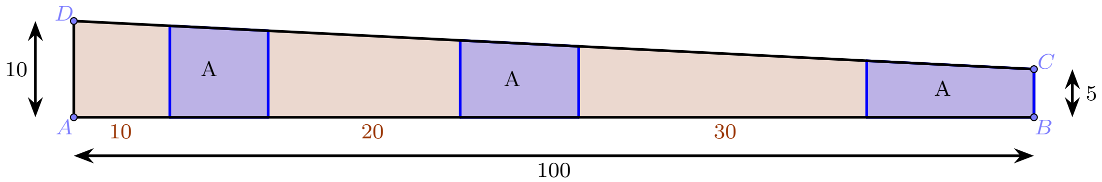
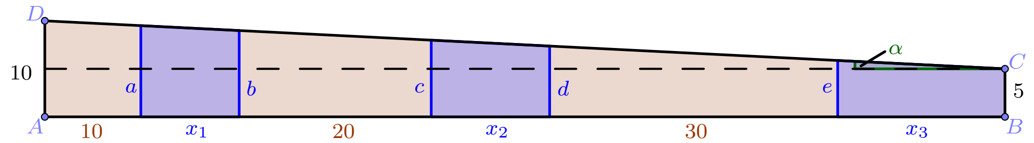
Drei Quadrate im Dreieck

In einem Trapez $\square ABCD$ haben die drei blauen Trapeze jeweils den gleichen Flächeninhalt A.
Die Abmessungen sind der Abbildung zu entnehmen.
Wie groß ist der Inhalt einer blauen Fläche?



Aufgabe von Andreas Grieser, Greifswald, vom 22. Mai 2021

Lösung



Mit Hilfe des Winkels $tan\ \alpha = \frac{5}{100}$ gelten die Beziehungen

im rechten blauen Trapez $\frac{5}{100} = \frac{e-5}{x_3}$, $\quad e = \frac{5}{100} \cdot x_3 + 5$ ...(1),

am mittleren blauen Trapez $\frac{5}{100} = \frac{d-5}{x_3+30}$, $\quad d = \frac{5}{100} \cdot (x_3 + 30) + 5$ ...(2),

am mittleren blauen Trapez $\frac{5}{100} = \frac{c-5}{x_3+30+x_2}$, $\quad c = \frac{5}{100} \cdot (x_3 + 30 + x_2) + 5$ ...(3),

am linken blauen Trapez $\frac{5}{100} = \frac{b-5}{x_3+50+x_2}$, $\quad b = \frac{5}{100} \cdot (x_3 + 50 + x_2) + 5$ ...(4),

am linken blauen Trapez $\frac{5}{100} = \frac{a-5}{x_3+50+x_2+x_1}$, $\quad a = \frac{5}{100} \cdot (x_3+50+x_2+x_1)+5$ ...(5).

x_2 kann ersetzt werden $\quad x_2 = 100 - x_1 - x_3 - 60 \quad x_2 = 40 - x_1 - x_3$ ...(6).

(6) in (3) $\quad c = \frac{5}{100} \cdot (x_3 + 30 + 40 - x_1 - x_3) + 5,$

$c = \frac{5}{100} \cdot (70 - x_1) + 5,$ ...(7),

(6) in (4) $\quad b = \frac{5}{100} \cdot (x_3 + 50 + 40 - x_1 - x_3) + 5,$

$b = \frac{5}{100} \cdot (90 - x_1) + 5,$ ...(8),

(6) in (5) $\quad a = \frac{5}{100} \cdot (x_3 + 50 + 40 - x_1 - x_3 + x_1) + 5$

$a = \frac{5}{100} \cdot 90 + 5 \quad a = 9{,}5$ ...(9).

Die linken und rechten blauen Trapeze sind flächengleich.

$A_{links} = A_{rechts}$, $\quad \frac{a+b}{2} \cdot x_1 = \frac{e+5}{2} \cdot x_3,$

mit (9), (8), (1) $\quad \left(9{,}5 + \frac{5}{100} \cdot (90 - x_1) + 5\right) \cdot x_1 = \left(\frac{5}{100} \cdot x_3 + 5 + 5\right) \cdot x_3,$

$19 \cdot x_1 - \frac{5}{100} \cdot x_1^2 = 10 \cdot x_3 + \frac{5}{100} \cdot x_3^2$ ...(10).

Das blaue Trapez in der Mitte hat den gleichen Flächeninhalt wie das rechte blaue Trapez.

$A_{Mitte} = A_{rechts}$, $\quad \frac{c+d}{2} \cdot x_2 = \frac{e+5}{2} \cdot x_3,$

mit (7), (2), (1) $\quad \left(\frac{5}{100} \cdot (70 - x_1) + 5 + \frac{5}{100} \cdot (x_3 + 30) + 5\right) \cdot x_2 = \left(\frac{5}{100} \cdot x_3 + 5 + 5\right) \cdot x_3,$

$\left(\frac{5}{100} \cdot (100 - x_1 + x_3) + 10\right) \cdot x_2 = \left(10 + \frac{5}{100} \cdot x_3\right) \cdot x_3,$

$\left(15 - \frac{5}{100} \cdot x_1 + \frac{5}{100} \cdot x_3\right) \cdot x_2 = 10 \cdot x_3 + \frac{5}{100} \cdot x_3^2,$

mit (6) $\quad \left(15 - \frac{5}{100} \cdot x_1 + \frac{5}{100} \cdot x_3\right) \cdot (40 - x_1 - x_3) = 10 \cdot x_3 + \frac{5}{100} \cdot x_3^2,$

$600 - 15 \cdot x_1 - 15 \cdot x_3 - 2 \cdot x_1 + \frac{5}{100} \cdot x_1^2 + \frac{5}{100} \cdot x_1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_3$

$- \frac{5}{100} \cdot x_1 \cdot x_3 - \frac{5}{100} \cdot x_3^2 = 10 \cdot x_3 + \frac{5}{100} \cdot x_3^2,$

$600 - 17 \cdot x_1 + \frac{5}{100} \cdot x_1^2 = 23 \cdot x_3 + \frac{1}{10} \cdot x_3^2$ ...(11).

Das Gleichungssystem aus den beiden Gleichungen (10) und (11) löst Wolfram Mathematica mit den Werten $x_1 = 10{,}245004802338653654$ und $x_3 = 17{,}422918127121786807$.

Dann ist mit (1) $\quad A = \frac{e+5}{2} \cdot x_3, \quad A = \frac{\frac{5}{100} \cdot x_3 + 5 + 5}{2} \cdot x_3,$

$A = \frac{1}{40} \cdot x_3^2 + 5 \cdot x_3, \quad \underline{\underline{A = 94{,}70354253721865}}$

Der Flächeninhalt eines blauen Trapezes beträgt $A = 94{,}7\ FE$.