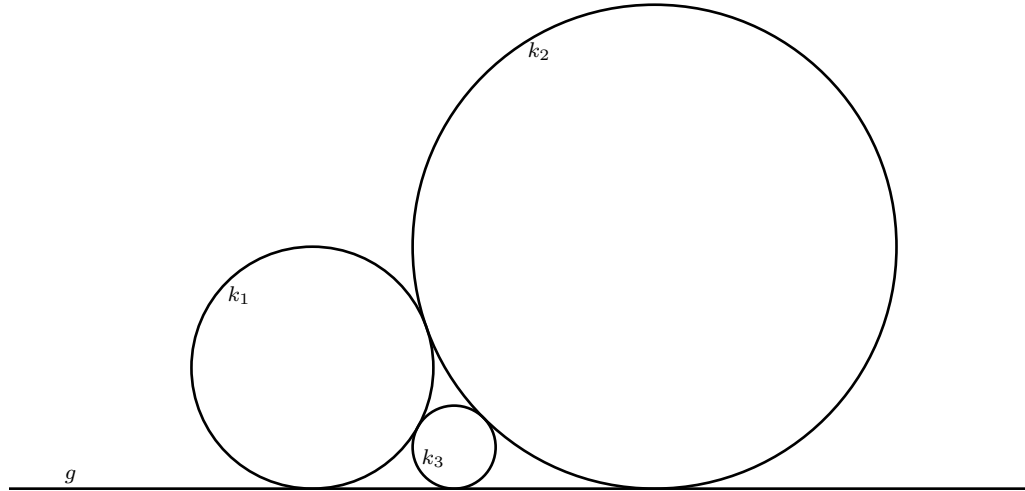


Drei sich berührende Kreise

Drei Kreise berühren sich, wie in der Abbildung dargestellt. Der Kreis k_3 mit dem Radius r_3 ist von einer Geraden g und den Kreisen k_1 und k_2 mit den Radien $r_1 = 2 \text{ cm}$ und $r_2 = 4 \text{ cm}$ eingeschlossen.

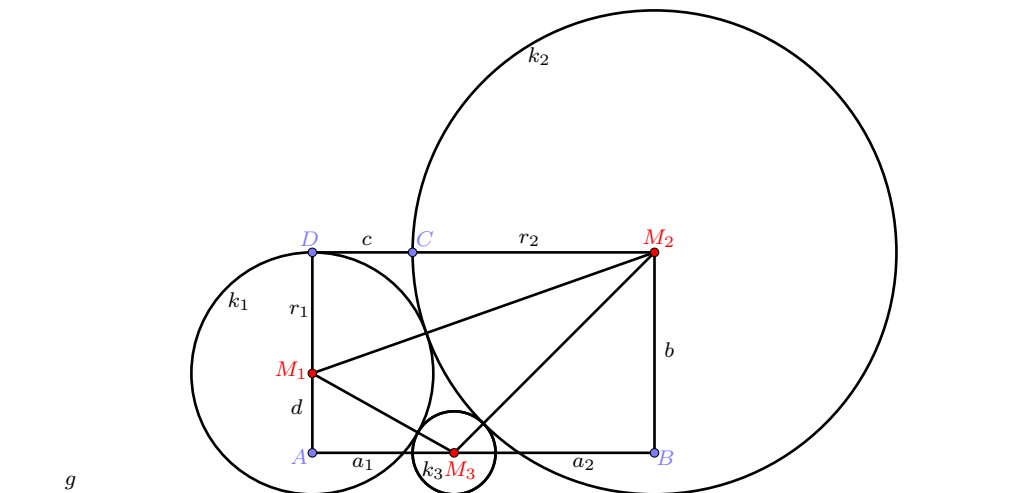
Welchen Radius besitzt der Kreis k_3 ?



Aufgabe von Andreas Grieser, Greifswald, vom 17. Juni 2022

Lösung

In dem Rechteck $\square ABM_2D$ werden drei rechtwinklige Dreiecke $\triangle AM_3M_1$, $\triangle M_3BM_2$ und $\triangle M_1M_2D$ gebildet.



$$\text{Es ist im Dreieck } \triangle AM_3M_1 \quad a_1^2 + d^2 = (r_1 + r_3)^2, \quad a_1 = \sqrt{(r_1 + r_3)^2 - d^2} \quad \dots(1),$$

$$d = r_1 - r_3, d \text{ in (1)} \quad a_1 = \sqrt{(r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2} \quad \dots(2),$$

$$\text{im Dreieck } \triangle M_3BM_2 \text{ ist} \quad a_2^2 + b^2 = (r_2 + r_3)^2, \quad a_2 = \sqrt{(r_2 + r_3)^2 - b^2},$$

$$b = d + r_1, b = 2 \cdot r_1 - r_3 \quad a_2 = \sqrt{(r_2 + r_3)^2 - (2 \cdot r_1 - r_3)^2} \quad \dots(3),$$

$$\text{im Dreieck } \triangle M_1M_2D \text{ ist} \quad r_1^2 + (c + r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2, \quad c + r_2 = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - r_1^2},$$

$$c + r_2 = \sqrt{(2 + 4)^2 - 2^2}, \quad c + r_2 = \sqrt{32} \quad \dots(4).$$

$$(2)+(3)=(4)$$

$$r_1 = 2, r_2=4$$

quadrieren

$$\sqrt{(r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2} + \sqrt{(r_2 + r_3)^2 - (2 \cdot r_1 - r_3)^2} = \sqrt{32},$$

$$\sqrt{(2 + r_3)^2 - (2 - r_3)^2} + \sqrt{(4 + r_3)^2 - (4 - r_3)^2} = \sqrt{32},$$

$$\sqrt{4 + 4 \cdot r_3 + r_3^2 - 4 + 4 \cdot r_3 - r_3^2} + \sqrt{16 + 8 \cdot r_3 + r_3^2 - 16 + 8 \cdot r_3 - r_3^2} = \sqrt{32},$$

$$\sqrt{8 \cdot r_3} + \sqrt{16 \cdot r_3} = \sqrt{32}, \quad (2 \cdot \sqrt{2} + 4) \cdot \sqrt{r_3} = \sqrt{32},$$

$$r_3 = \frac{32}{(2 \cdot \sqrt{2} + 4)^2},$$

$$r_3 = \frac{32}{8 + 16 \cdot \sqrt{2} + 16},$$

$$r_3 = \frac{32}{24 + 16 \cdot \sqrt{2}},$$

$$r_3 = \frac{4}{3 + 2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{3 - 2 \cdot \sqrt{2}}{3 - 2 \cdot \sqrt{2}},$$

$$r_3 = 4 \cdot (3 - 2 \cdot \sqrt{2}),$$

$$r_3 \approx 0,68629.$$

Der Kreis k_3 hat einen Radius von $r_3 = 4 \cdot (3 - 2 \cdot \sqrt{2})$ cm.