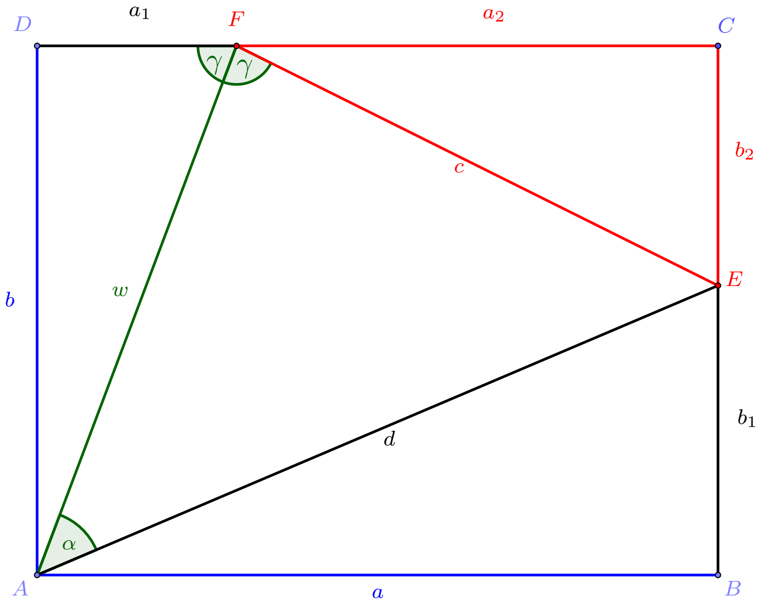
Dreieck im Rechteck

Gegeben ist ein Rechteck $\square ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$. Die Punkte E und F sind zwei Punkte auf den Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$, so dass für den Umfang u des Dreiecks ΔECF gilt: $u = a + b$. Zusätzlich ist Strecke $\overline{AF}$ die Winklehalbierende vom Dreieck ΔEFD.

a) In welchem Verhältnis stehen die Seiten a und b?

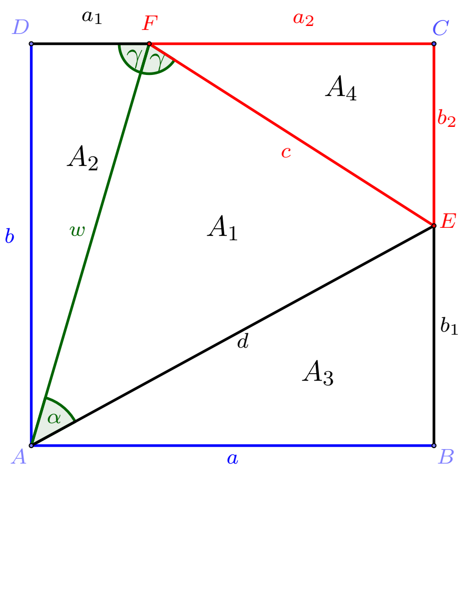
b) Welche Größe hat der Winkel $\alpha = \sphericalangle FAE$?



Aufgabe aus der Mathematikzeitschrift „Die Wurzel“ vom 27. Januar 2002

Lösung

a) Der Umfang des Dreiecks ΔECF ist gleich dem halben Umfang des Rechtecks
$c+b_2+a_2 = a+b$. Da $a = a_1 + a_2$ und $b = b_1 + b_2$, ist $c = a_1 + b_1$ ...(1).
Im Dreieck ΔAEF gilt: $d^2 = c^2 + w^2 - 2 \cdot c \cdot w \cdot cos\,(\gamma)$ ...(2).
Weiterhin ist im Dreieck ΔAFD: $cos\,(\gamma) = \frac{a_1}{w}$ ...(3).
Zwei weitere Beziehungen sind $w^2 = a_1^2 + b^2$ ...(4) und $d^2 = a^2 + b_1^2$ ...(5).
(3), (4), (5) in (2): $a^2 + b_1^2 = c^2 + a_1^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot w \cdot \frac{a_1}{w}$, $a^2 + b_1^2 = a_1^2 + b^2 + c \cdot (c - 2 \cdot a_1)$,
mit (1) $a^2 + b_1^2 = a_1^2 + b^2 + (b_1 + a_1) \cdot (b_1 - a_1)$, $a^2 + b_1^2 = a_1^2 + b^2 + b_1^2 - a_1^2$, $\underline{\underline{a = b}}$.
Das Rechteck ist ein Quadrat, $a : b = 1 : 1$.



b) Für die Flächen im Viereck $\square ABCD$ gilt: $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$,

$a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot w \cdot sin\,(\gamma) + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b_1 + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot b_2$,

mit $sin\,(\gamma) = \frac{b}{w}$ $\quad 2 \cdot a \cdot b = b \cdot c + a_1 \cdot b + a \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$,

mit $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$,

$2 \cdot a_1 \cdot b_1 + 2 \cdot a_1 \cdot b_2 + 2 \cdot a_2 \cdot b_1 + 2 \cdot a_2 \cdot b_2 = (b_1 + b_2) \cdot c + a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$,

mit (1) $\quad a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = a_1 \cdot b_1 + b_1^2 + a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot b_2$,

$a_2 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = a_1 \cdot b_1 + b_1^2 + b_1 \cdot b_2$, $\quad a_2 \cdot b = b_1 \cdot (a_1 + b)$, $\quad b \cdot (a_2 - b_1) = a_1 \cdot b_1$ ...(6).

Im Dreieck Δ AEF gilt entsprechend des Kosinussatzes $\quad d^2 = c^2 + w^2 - 2 \cdot c \cdot w \cdot cos\,(\gamma)$,

mit $cos\,(\gamma) = \frac{a_1}{w}$ $\quad d^2 - c^2 = w^2 - 2 \cdot a_1 \cdot c$ ...(7),

und in einer anderen Form $\quad cos\,(\alpha) = \frac{w^2 + d^2 - c^2}{2 \cdot d \cdot w}$.

Mit (7) entsteht $\quad cos\,(\alpha) = \frac{w^2 + w^2 - 2 \cdot a_1 \cdot c}{2 \cdot d \cdot w}$, $\quad cos\,(\alpha) = \frac{w^2 - a_1 \cdot c}{d \cdot w}$ ...(8).

Der Sinussatz $\quad \frac{sin(\alpha)}{sin(\gamma)} = \frac{c}{d}$, $\quad sin\,(\alpha) = \frac{c}{d} \cdot sin\,(\gamma)$,

mit $sin\,(\gamma) = \frac{b}{w}$ $\quad sin\,(\alpha) = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{w}$ liefert $\quad d \cdot w = \frac{b \cdot c}{sin(\alpha)}$ ...(9).

Aus (9) in (8) $\quad cos\,(\alpha) = \frac{w^2 - a_1 \cdot c}{b \cdot c} \cdot sin\,(\alpha)$, $\quad tan\,(\alpha) = \frac{b \cdot c}{w^2 - a_1 \cdot c}$,

mit $w^2 = a_1^2 + b^2$ $\quad tan\,(\alpha) = \frac{b \cdot c}{a_1^2 + b^2 - a_1 \cdot c}$, wird

mit (1) $\quad tan\,(\alpha) = \frac{b \cdot c}{a_1^2 + b^2 - a_1^2 - a_1 \cdot b_1}$, $\quad tan\,(\alpha) = \frac{b \cdot c}{b^2 - a_1 \cdot b_1}$,

mit (6), $|:b$ $\quad tan\,(\alpha) = \frac{b \cdot c}{b^2 - b \cdot (a_2 - b_1)}$, $\quad tan\,(\alpha) = \frac{c}{b - a_2 + b_1}$,

mit (1) , $a = b$ $\quad tan\,(\alpha) = \frac{a_1 + b_1}{a - a_2 + b_1}$, $\quad tan\,(\alpha) = \frac{a_1 + b_1}{a_1 + b_1}$,

$tan\,(\alpha) = 1$, $\quad \underline{\underline{\alpha = 45^\circ}}$.

Der Winkel $\alpha = \sphericalangle FAE$ ist $\alpha = 45^\circ$ groß.