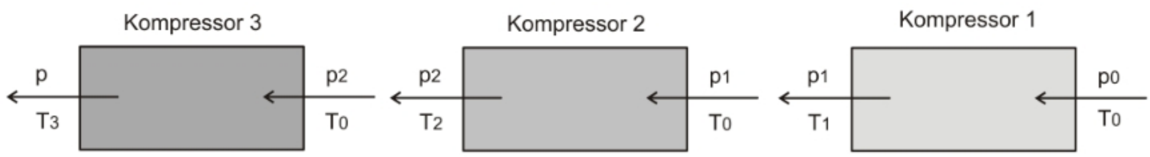
Dreistufiger Kompressor

Ein Gas soll in einem dreistufigen Kompressor vom Druck p_0 auf den Druck $p > p_0$ komprimiert werden. Der Kompressor ist mit zwei Kühlkammern versehen, die das Gas vor jedem Kompressionsvorgang wieder auf die Ausgangstemperatur bringen. Bezeichnet man mit p_1 bzw. p_2 den Druck des Gases nach der 1. bzw. 2. Kompressionsstufe, so gilt für die Kompressionsarbeit je Mol des Gases die Formel:

$$A = f(p_1, p_2) = \frac{R \cdot T_0}{\alpha} \cdot \left(\left(\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\alpha} - 1 \right) + \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\alpha} - 1 \right) + \left(\left(\frac{p}{p_2} \right)^{\alpha} - 1 \right) \right).$$

Hierbei sind T_0 die absolute Temperatur des Gases vor der Kompression und $\alpha < 1$ eine Konstante, die von der Konstruktion des Kompressors abhängig ist.
Wie sind die Drücke p_1 und p_2 zu wählen ($p_0 < p_1 < p_2 < p$), damit die aufzuwendende Arbeit möglichst klein wird?

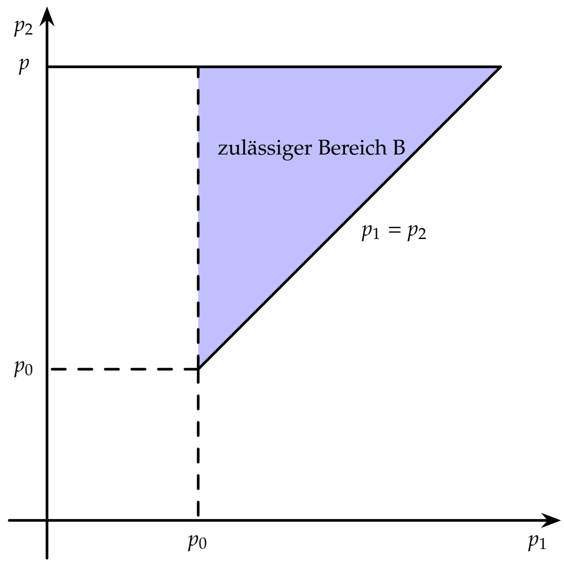
1. Skizziere den zulässigen Bereich B in der p_1, p_2 Ebene!
2. In welchem Punkt $P\,(\,p_{10} \mid p_{20}\,)$ besitzt die Funktion $f(p_1, p_2)$ ein lokales Extremum? Welche Art von Extremum liegt vor?
3. Zeige das der Punkt $P\,(\,p_{1_E} \mid p_{2_E}\,)$ im Bereich B liegt!



Aufgabe beim 13. Mathematikwettstreit an der TH Ilmenau vom 11. März 1986

Lösung

1. Die Drücke p_1 und p_2 liegen in dem blauen Dreieck, wobei die Linien selbst nicht mehr zum Dreick gehören, da $p_0 < p_1 < p_2 < p$.



2. Die Funktion f muss partiell abgeleitet werden, die notwendige Bedingung für ein lokales Extrema ist $\frac{\partial f(p_1,p_2)}{\partial p_1} = 0$ und $\frac{\partial f(p_1,p_2)}{\partial p_2} = 0$. Die konstanten R, T_0 und α werden zusammengefasst zu $k = \frac{R \cdot T_0}{\alpha}$.

Die Ableitung nach p_1 ist $\quad \frac{\partial f_{p_1}(p_1,p_2)}{\partial p_1} = k \cdot \left(\frac{\alpha}{p_0^{\alpha}} \cdot p_1^{\alpha-1} - \alpha \cdot p_2^{\alpha} \cdot p_1^{-\alpha-1} \right),$

$0 = \frac{\alpha}{p_0^{\alpha}} \cdot p_1^{\alpha-1} - \alpha \cdot p_2^{\alpha} \cdot p_1^{-\alpha-1}, \qquad \alpha \cdot p_2^{\alpha} \cdot p_1^{-\alpha-1} = \frac{\alpha}{p_0^{\alpha}} \cdot p_1^{\alpha-1},$

$\mid : \alpha$, Wurzel ziehen $\quad (p_0 \cdot p_2)^{\alpha} = p_1^{2 \cdot \alpha}, \qquad p_1 = \sqrt{p_0 \cdot p_2} \qquad$ ...(1),

die Ableitung nach p_2 ist
$$\frac{\partial f_{p_2}(p_1,p_2)}{\partial p_2} = k \cdot \left(\frac{\alpha}{p_1^\alpha} \cdot p_2^{\alpha-1} - \alpha \cdot p^\alpha \cdot p_2^{-\alpha-1} \right),$$
$$0 = \frac{\alpha}{p_1^\alpha} \cdot p_2^{\alpha-1} - \alpha \cdot p^\alpha \cdot p_2^{-\alpha-1}, \qquad \alpha \cdot p^\alpha \cdot p_2^{-\alpha-1} = \frac{\alpha}{p_1^\alpha} \cdot p_2^{\alpha-1},$$
$| : \alpha$, Wurzel ziehen
$$(p_1 \cdot p)^\alpha = p_2^{2\cdot\alpha}, \qquad p_2 = \sqrt{p_1 \cdot p} \qquad \text{...(2),}$$
(2) in (1)
$$p_1 = \sqrt{p_0 \cdot \sqrt{p_1 \cdot p}}, \qquad p_1^2 = p_0 \cdot \sqrt{p_1 \cdot p},$$
$$p_1^4 = p_0^2 \cdot p_1 \cdot p, \qquad p_1^3 = p_0^2 \cdot p,$$
dritte Wurzel ziehen
$$\underline{\underline{p_{1_E} = \sqrt[3]{p_0^2 \cdot p}}} \qquad \text{...(3),}$$
(1) in (2)
$$p_2 = \sqrt{\sqrt{p_0 \cdot p_2} \cdot p}, \qquad p_2^2 = \sqrt{p_0 \cdot p_2} \cdot p,$$
$$p_2^4 = p_0 \cdot p_2 \cdot p^2, \qquad p_2^3 = p_0 \cdot p^2,$$
dritte Wurzel ziehen
$$\underline{\underline{p_{2_E} = \sqrt[3]{p_0 \cdot p^2}}} \qquad \text{...(4).}$$
Das Extrema der Funktion f liegt vermutlich im Punkt $P\left(p_{1_E} \mid p_{2_E}\right) = P\left(\sqrt[3]{p_0^2 \cdot p} \mid \sqrt[3]{p_0 \cdot p^2}\right)$. Dort darf, als hinreichende Bedingung für die Existenz des Extremas, die zweite partielle Ableitung nicht null sein.

Es ist $\frac{\partial f'{p_1}(p_1,p_2)}{\partial p_1} = f_{p_1p_1}(p_1,p_2)$
$$f_{p_1p_1}(p_1,p_2) = k \cdot \left(\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{p_0^\alpha} \cdot p_1^{\alpha-2} + \alpha \cdot (\alpha+1) \cdot p_2^\alpha \cdot p_1^{-\alpha-2} \right),$$
an der Stelle p_{1_E} mit p_2 aus (4)
$$f_{p_1p_1}(p_1,p_2) = k\cdot\left(\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{p_0^\alpha} \cdot \left(p_0^2 \cdot p\right)^{\frac{\alpha-2}{3}} + \alpha \cdot (\alpha+1) \cdot \left(p_0 \cdot p^2\right)^{\frac{\alpha}{3}} \cdot \left(p_0^2 \cdot p\right)^{\frac{-\alpha-2}{3}} \right),$$
$$f_{p_1p_1}(p_1,p_2) = k \cdot \alpha \cdot \left((\alpha-1) \cdot p_0^{\frac{-\alpha-4}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-2}{3}} + (\alpha+1) \cdot p_0^{\frac{-\alpha-4}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-2}{3}} \right),$$
$$f_{p_1p_1}(p_1,p_2) = k \cdot \alpha \cdot \left(2 \cdot \alpha \cdot p_0^{\frac{-\alpha-4}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-2}{3}} \right),$$
$$f_{p_1p_1}(p_1,p_2) = 2 \cdot k \cdot \alpha^2 \cdot p_0^{\frac{-\alpha-4}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-2}{3}} \neq 0 \qquad \text{...(5),}$$
$\frac{\partial f'{p_2}(p_1,p_2)}{\partial p_2} = f_{p_2p_2}(p_1,p_2)$
$$f_{p_2p_2}(p_1,p_2) = k \cdot \left(\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{p_1^\alpha} \cdot p_2^{\alpha-2} + \alpha \cdot (\alpha+1) \cdot p^\alpha \cdot p_2^{-\alpha-2} \right),$$
an der Stelle p_{2_E} mit p_1 aus (3)
$$f_{p_2p_2}(p_1,p_2) = k\cdot\left(\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{\left(p_0^2\cdot p\right)^{\frac{\alpha}{3}}} \cdot \left(p_0 \cdot p^2\right)^{\frac{\alpha-2}{3}} + \alpha \cdot (\alpha+1) \cdot p^\alpha \cdot \left(p_0 \cdot p^2\right)^{\frac{-\alpha-2}{3}} \right),$$
$$f_{p_2p_2}(p_1,p_2) = k \cdot \alpha \cdot \left((\alpha-1) \cdot p_0^{\frac{-\alpha-2}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-4}{3}} + (\alpha+1) \cdot p_0^{\frac{-\alpha-2}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-4}{3}} \right),$$
$$f_{p_2p_2}(p_1,p_2) = k \cdot \alpha \cdot \left(2 \cdot \alpha \cdot p_0^{\frac{-\alpha-2}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-4}{3}} \right),$$
$$f_{p_2p_2}(p_1,p_2) = 2 \cdot k \cdot \alpha^2 \cdot p_0^{\frac{-\alpha-2}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-4}{3}} \neq 0 \qquad \text{...(6).}$$
Die gemischte zweite Ableitung nach p_1 und p_2 beginnt mit der Ableitung nach p_1.

So ist s.o.
$$\frac{\partial f_{p_1}(p_1,p_2)}{\partial p_1} = k \cdot \left(\frac{\alpha}{p_0^\alpha} \cdot p_1^{\alpha-1} - \alpha \cdot p_2^\alpha \cdot p_1^{-\alpha-1} \right),$$
dann nach p_2
$$f_{p_1p_2}(p_1,p_2) = k \cdot \alpha^2 \cdot p_1^{-\alpha-1} \cdot p_2^{\alpha-1},$$
mit (3), (4)
$$f_{p_1p_2}(p_1,p_2) = k \cdot \alpha^2 \cdot \left(p_0^2 \cdot p\right)^{\frac{-\alpha-1}{3}} \cdot \left(p_0 \cdot p^2\right)^{\frac{\alpha-1}{3}},$$
zusammenfassen
$$f_{p_1p_2}(p_1,p_2) = k \cdot \alpha^2 \cdot p_0^{\frac{-\alpha-3}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-3}{3}} \neq 0 \qquad \text{...(7).}$$
Die Hesse-Matrix stellt sich dann mit (5), (6) und (7) wie folgt dar:

Da $f_{p_1p_2}(p_1,p_2) = f_{p_2p_1}(p_1,p_2)$
$$H = \begin{pmatrix} f_{p_1p_1} & f_{p_1p_2} \\ f_{p_2p_1} & f_{p_2p_2} \end{pmatrix},$$
$$H = k \cdot \alpha^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot p_0^{\frac{-\alpha-4}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-2}{3}} & p_0^{\frac{-\alpha-3}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-3}{3}} \\ p_0^{\frac{-\alpha-3}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-3}{3}} & 2 \cdot p_0^{\frac{-\alpha-2}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-4}{3}} \end{pmatrix}.$$
Der erste Hauptminor ist der Eintrag oben links $H_1 = 2 \cdot k \cdot \alpha^2 \cdot p_0^{\frac{-\alpha-4}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-2}{3}}$. Er ist positiv.
Der zweite Hauptminor (Determinante) der zweiten Teilmatrix H_2 kann mit der Sarrus-Regel berechnet werden, es ist
$$H_2 = k \cdot \alpha^2 \cdot \left(2 \cdot p_0^{\frac{-\alpha-4}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-2}{3}} \cdot 2 \cdot p_0^{\frac{-\alpha-2}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-4}{3}} - \left(p_0^{\frac{-\alpha-3}{3}} \cdot p^{\frac{\alpha-3}{3}} \right)^2 \right),$$
$$H_2 = k \cdot \alpha^2 \cdot \left(4 \cdot p_0^{\frac{-2\cdot\alpha-6}{3}} \cdot p^{\frac{2\cdot\alpha-6}{3}} - p_0^{\frac{-2\cdot\alpha-6}{3}} \cdot p^{\frac{2\cdot\alpha-6}{3}} \right),$$
$$H_2 = 3 \cdot k \cdot \alpha^2 \cdot p_0^{\frac{-2\cdot\alpha-6}{3}} \cdot p^{\frac{2\cdot\alpha-6}{3}} \Rightarrow H_2 \text{ ist positiv.}$$

Die Determinanten von H_1 und H_2 sind positiv, so ist nach dem Kriterium von Sylvester die Hesse-Matrix positiv. Es kann geschlussfolgert werden, dass es sich im Punkt $P_E\left(\sqrt[3]{p_0^2 \cdot p} \mid \sqrt[3]{p_0 \cdot p^2}\right)$ um ein lokales Minimum handelt.

Eine Rechnung soll der Kontrolle dienen. Es wird angenommen, dass es sich um ein ideales Gas handelt mit einer Anfangstemperatur von $\vartheta_0 = 20°C$, die Konstante α hat einen Wert von $\alpha = 0{,}8125$. Der Ausgangsdruck p_0 sei der Normdruck, der sich durch die Kompression auf $p = 8 \cdot p_0$ erhöht. Dann

errechnet sich k aus	$k = \frac{T_0 \cdot R}{\alpha}$,	$k = \frac{293{,}15\ K \cdot 8{,}3145 \frac{J}{mol \cdot K}}{0{,}8125}$,	$k = 3\ \frac{kJ}{mol}$.
Es ist mit (3)	$p_{1_E} = \sqrt[3]{p_0^2 \cdot 8 \cdot p_0}$,	$p_{1_E} = \sqrt[3]{8 \cdot p_0^3}$,	$p_{1_E} = 2 \cdot p_0$,
und mit (4)	$p_{2_E} = \sqrt[3]{p_0 \cdot (8 \cdot p_0)^2}$,	$p_{2_E} = \sqrt[3]{64 \cdot p_0^3}$,	$p_{2_E} = 4 \cdot p_0$.

Der Punkt P_E hat die Koordinaten $P_E\,(2 \cdot p_0 \mid 4 \cdot p_0)$. Die vom Kompressor minimale verrichtete Arbeit wird durch Einsetzen der Werte von P_E in die Ausgangsgleichung berechnet.

Sie beträgt
$$A = 3\ \frac{kJ}{mol} \cdot ((2^\alpha - 1) + (2^\alpha - 1) + (2^\alpha - 1)),$$
$$A = 3\ \frac{kJ}{mol} \cdot 3 \cdot \left(2^{0{,}8125} - 1\right),$$
$$\underline{\underline{A = 6{,}81 \frac{kJ}{mol}}}.$$

Angenommen, die Gesamtkompression bleibt bei $p = 8 \cdot p_0$, aber $p_1 = 3 \cdot p_0$ und $p_2 = 5 \cdot p_0$, dann beträgt die Arbeit
$$A_1 = 3\ \frac{kJ}{mol} \cdot \left(3^\alpha - 1 + \left(\frac{5 \cdot p_0}{3 \cdot p_0}\right)^\alpha - 1 + \left(\frac{8 \cdot p_0}{5 \cdot p_0}\right)^\alpha - 1\right),$$
$$A_1 = 3\ \frac{kJ}{mol} \cdot \left(3^\alpha - 1 + \left(\frac{5}{3}\right)^\alpha - 1 + \left(\frac{8}{5}\right)^\alpha - 1\right),$$
$$A_1 = 3\ \frac{kJ}{mol} \cdot (2{,}4415 + 1{,}5144 + 1{,}4650 - 3),$$
$$A_1 = 7{,}26 \frac{kJ}{mol} > A.$$

Ein weiteres Beispiel mit weiterhin $p = 8 \cdot p_0$ berechnet die Arbeit, die am Gases verrichtet wird, mit $P_2\,(6 \cdot p_o \mid 7 \cdot p_0)$
$$A_2 = 3\ \frac{kJ}{mol} \cdot \left(6^\alpha - 1 + \left(\frac{7}{6}\right)^\alpha - 1 + \left(\frac{8}{7}\right)^\alpha - 1\right),$$
$$A_2 = 3\ \frac{kJ}{mol} \cdot (4{,}2879 + 1{,}1334 + 1{,}1146 - 3),$$
$$A_2 = 10{,}61 \frac{kJ}{mol} > A,$$

oder auch $p = 8 \cdot p_0$, mit $P_3\,(2 \cdot p_0 \mid 3 \cdot p_0)$
$$A_3 = 3\ \frac{kJ}{mol} \cdot \left(2^\alpha - 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha - 1 + \left(\frac{8}{3}\right)^\alpha - 1\right),$$
$$A_3 = 3\ \frac{kJ}{mol} \cdot (1{,}7563 + 1{,}3902 + 2{,}187 - 3),$$
$$A_3 = 7{,}0954 \frac{kJ}{mol} > A.$$

3.