# Ganzzahlige Diagonalen eines Quaders - Euler-Ziegel

Es gibt Quader, dessen längste Seite 1584 $mm$ groß ist und dessen Diagonalen auf den Flächen ganzzahlig sind.
Welcher von diesen Quadern hat die kürzeste Kantenlänge?

Aufgabe der Serie 56, Nr.669 von Thomas Jahre, Chemnitz, vom 26. März 2021

**Lösung**

Gesucht sind zwei pythagoreische Tripel, von denen die Zahl 1584 vorgegeben ist. Der indische Mathematiker Brahmagupta (ca. 598 - ca. 668 n.Chr.) hat eine Methode entwickelt, um diese Tripel zu finden. Er nahm eine natüliche Zahl $a$, quadrierte sie und teilte $a^2$ durch eine natüliche Zahl $d$, bildete die Differenz $\frac{a^2}{d} - d$, halbierte den Ausdruck und definierte damit die Zahl $b = \frac{\frac{a^2}{d} - d}{2}$...(1). Wenn $b$ ganzzahlig ist, so erält man mit $b + d = c$...(2) die pythagoreischen Tripel $(a, b, c)$.

Beweis: Mit (2) ist $\quad d = c - b \quad$ ...(3),

(3) in (1) $\quad b = \frac{\frac{a^2}{c-b} - (c-b)}{2}, \quad 2 \cdot b = \frac{a^2}{c-b} - c + b,$

$b + c = \frac{a^2}{c-b}, \quad (b + c) \cdot (c - b) = a^2,$

$c^2 - b^2 = a^2, \quad \underline{\underline{a^2 + b^2 = c^2}}$ w.z.b.w.

Die Zahlen $a$ und $b$ sind Längenangaben von Katheten, die Zahl $c$ ist die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks.

Wenn $a = 1584$ ist, so liefert der Befehl in Geogebra
$Sortiere(EntferneUndefiniert(Folge(Wenn((1584^2/i - i)/2 < 1584 \wedge Mod((1584^2/i - i)/2, 1) == 0 \wedge (1584^2/i - i)/2 \neq 0, (1584^2/i - i)/2), i, 1, 1584, 1)))$
alle natürlichen Zahlen $b = (138, 187, 320, 462, 513, 660, 812, 1020, 1188, 1365, 1430)$. Die Tabelle zeigt alle ganzzahligen Werte für $b$ und $d$.

| $d$ | $a$ | $b = \frac{\frac{a^2}{d} - d}{2}$ |
|---|---|---|
| 704 | 1584 | 1430 |
| 726 | 1584 | 1365 |
| 792 | 1584 | 1188 |
| 864 | 1584 | 1020 |
| 968 | 1584 | 812 |
| 1056 | 1584 | 660 |
| 1152 | 1584 | 513 |
| 1188 | 1584 | 462 |
| 1296 | 1584 | 320 |
| 1408 | 1584 | 187 |
| 1452 | 1584 | 138 |

Die elf Werte von $b$ müssen nun noch miteinander kombiniert werden, so dass wieder eine ganze Zahl entsteht. Dies gelingt mit dem Befehl
$Folge(Folge((Element(l1, i)^2 + Element(l1, j)^2)^{0.5}, i, 1, Länge(l1)), j, 1, Länge(l1))$.
Es zeigt sich, dass in der ausgegebenen Matrix nur zwei ganze Zahlen stehen, 562 und 1037.
Es entsteht 1037 aus $1037 = \sqrt{187^2 + 1020^2}$ und 562 aus $562 = \sqrt{462^2 + 320^2}$.
Damit sind zwei Quader gefunden, deren Seitendiagonalen ganzzahlige Werte aufweisen. Diese Quader werden **Euler-Ziegel** genannt. Es sind die Quader mit den Seitenlängen
$Q_1(a = 1584, b = 187, c = 1020)$ und $Q_2(a = 1584, b = 462, c = 320)$.
Der Quader mit der kürzesten Seitenänge ist Quader $Q_1$ mit $b = 187$ (alle Angaben in $mm$).

Ein Euler-Ziegel ist ein Quader, bei dem die Längen der Kanten und Flächendiagonalen ganzzahlige Werte haben. Er wird von drei Dreiecken aufgespannt, deren Kantenlängen Pythagoreische Tripel sind, und deren rechte Winkel an einer Ecke zusammenstoßen. Ein Euler-Ziegel ist primitiv, wenn die drei Kantenlängen keinen gemeinsamen Teiler haben. Er ist perfekt, wenn auch die Raumdiagonalen ganzzahlige Werte annehmen. Dieser Ziegel wurde aber noch nicht gefunden. Wenn es ihn gibt, müsste seine kleinste Kante größer als $10^7$ $m$ sein.
Ein kurzes Python-Programm berechnet alle Euler-Ziegel unter 1 $m$ Kantenlänge. Es braucht dafür fast $6\frac{1}{2}$ Minuten.

```
import math
n = 1000
print('{}\n{}'.format('|a|b|c|d1|d2|d3|','________________________________'))
for a in range(1,n+1):
 for b inrange(a+1,n+1):
  for c in range(b+1,n+1):
   if math.sqrt(a**2+b**2)%1 == 0 and math.sqrt(a**2+c**2)%1 == 0 and
     math.sqrt(b**2+c**2)%1 == 0:
    d1 = int(math.sqrt(a**2+b**2))
    d2 = int(math.sqrt(a**2+c**2))
    d3 = int(math.sqrt(b**2+c**2))
    print('{:2}{:3}{:2}{:2}{:3}{:2}{:2}{:3}{:2}{:2}{:4}{:2}{:2}{:4}{:2}{:2}{:4}
         {:2}'.format('|',a,'','|',b,'','|',c,'','|',d1,'','|',d2,'','|',d3,'|'))
```

Die Tabelle zeigt alle primitiven Euler-Ziegel mit Kantenlängen unter 1 $m$ (Angaben in $mm$).

| $a$ | $b$ | $c$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 44 | 117 | 240 | 125 | 244 | 267 |
| 85 | 132 | 720 | 157 | 725 | 732 |
| 140 | 480 | 693 | 500 | 707 | 843 |
| 160 | 231 | 792 | 281 | 808 | 825 |
| 240 | 252 | 275 | 348 | 365 | 373 |

Ingmar Rubin, Berlin , hat mit einem Python-Programm Euler-Ziegel mit Kantenlängen bis zu fast 8 $m$ gefunden.

| a | b | c | d1 | d2 | d3 |
|---|---|---|---|---|---|
| 117 | 44 | 240 | 125 | 244 | 267 |
| 240 | 252 | 275 | 348 | 373 | 365 |
| 234 | 88 | 480 | 250 | 488 | 534 |
| 480 | 504 | 550 | 696 | 746 | 730 |
| 140 | 480 | 693 | 500 | 843 | 707 |
| 351 | 132 | 720 | 375 | 732 | 801 |
| 132 | 85 | 720 | 157 | 725 | 732 |
| 231 | 160 | 792 | 281 | 808 | 825 |
| 720 | 756 | 825 | 1044 | 1119 | 1095 |
| 468 | 176 | 960 | 500 | 976 | 1068 |
| 960 | 1008 | 1100 | 1392 | 1492 | 1460 |
| 1100 | 1008 | 1155 | 1492 | 1533 | 1595 |
| 585 | 220 | 1200 | 625 | 1220 | 1335 |
| 1200 | 1260 | 1375 | 1740 | 1865 | 1825 |
| 280 | 960 | 1386 | 1000 | 1686 | 1414 |
| 702 | 264 | 1440 | 750 | 1464 | 1602 |
| 264 | 170 | 1440 | 314 | 1450 | 1464 |
| 462 | 320 | 1584 | 562 | 1616 | 1650 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1020 | 187 | 1584 | 1037 | 1595 | 1884 |
| 1440 | 1512 | 1650 | 2088 | 2238 | 2190 |
| 819 | 308 | 1680 | 875 | 1708 | 1869 |
| 936 | 352 | 1920 | 1000 | 1952 | 2136 |
| 1680 | 1764 | 1925 | 2436 | 2611 | 2555 |
| 420 | 1440 | 2079 | 1500 | 2529 | 2121 |
| 1053 | 396 | 2160 | 1125 | 2196 | 2403 |
| 396 | 255 | 2160 | 471 | 2175 | 2196 |
| 1920 | 2016 | 2200 | 2784 | 2984 | 2920 |
| 2200 | 2016 | 2310 | 2984 | 3066 | 3190 |
| 880 | 429 | 2340 | 979 | 2379 | 2500 |
| 693 | 480 | 2376 | 843 | 2424 | 2475 |
| 1170 | 440 | 2400 | 1250 | 2440 | 2670 |
| 2160 | 2268 | 2475 | 3132 | 3357 | 3285 |
| 1287 | 484 | 2640 | 1375 | 2684 | 2937 |
| 855 | 832 | 2640 | 1193 | 2768 | 2775 |
| 2400 | 2520 | 2750 | 3480 | 3730 | 3650 |
| 560 | 1920 | 2772 | 2000 | 3372 | 2828 |
| 1404 | 528 | 2880 | 1500 | 2928 | 3204 |
| 528 | 340 | 2880 | 628 | 2900 | 2928 |
| 2475 | 780 | 2992 | 2595 | 3092 | 3883 |
| 2640 | 2772 | 3025 | 3828 | 4103 | 4015 |
| 1521 | 572 | 3120 | 1625 | 3172 | 3471 |
| 2035 | 828 | 3120 | 2197 | 3228 | 3725 |
| 924 | 640 | 3168 | 1124 | 3232 | 3300 |
| 2040 | 374 | 3168 | 2074 | 3190 | 3768 |
| 2880 | 3024 | 3300 | 4176 | 4476 | 4380 |
| 1638 | 616 | 3360 | 1750 | 3416 | 3738 |
| 3300 | 3024 | 3465 | 4476 | 4599 | 4785 |
| 700 | 2400 | 3465 | 2500 | 4215 | 3535 |
| 3120 | 3276 | 3575 | 4524 | 4849 | 4745 |
| 1755 | 660 | 3600 | 1875 | 3660 | 4005 |
| 660 | 425 | 3600 | 785 | 3625 | 3660 |
| 1872 | 704 | 3840 | 2000 | 3904 | 4272 |
| 3360 | 3528 | 3850 | 4872 | 5222 | 5110 |
| 1155 | 800 | 3960 | 1405 | 4040 | 4125 |
| 1989 | 748 | 4080 | 2125 | 4148 | 4539 |
| 3600 | 3780 | 4125 | 5220 | 5595 | 5475 |
| 840 | 2880 | 4158 | 3000 | 5058 | 4242 |
| 2106 | 792 | 4320 | 2250 | 4392 | 4806 |
| 792 | 510 | 4320 | 942 | 4350 | 4392 |
| 3840 | 4032 | 4400 | 5568 | 5968 | 5840 |
| 2223 | 836 | 4560 | 2375 | 4636 | 5073 |
| 4400 | 4032 | 4620 | 5968 | 6132 | 6380 |
| 4080 | 4284 | 4675 | 5916 | 6341 | 6205 |
| 1760 | 858 | 4680 | 1958 | 4758 | 5000 |
| 1386 | 960 | 4752 | 1686 | 4848 | 4950 |
| 3060 | 561 | 4752 | 3111 | 4785 | 5652 |
| 2340 | 880 | 4800 | 2500 | 4880 | 5340 |
| 980 | 3360 | 4851 | 3500 | 5901 | 4949 |
| 4320 | 4536 | 4950 | 6264 | 6714 | 6570 |
| 2457 | 924 | 5040 | 2625 | 5124 | 5607 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 924 | 595 | 5040 | 1099 | 5075 | 5124 |
| 4560 | 4788 | 5225 | 6612 | 7087 | 6935 |
| 2574 | 968 | 5280 | 2750 | 5368 | 5874 |
| 1710 | 1664 | 5280 | 2386 | 5536 | 5550 |
| 4800 | 5040 | 5500 | 6960 | 7460 | 7300 |
| 2691 | 1012 | 5520 | 2875 | 5612 | 6141 |
| 1617 | 1120 | 5544 | 1967 | 5656 | 5775 |
| 1120 | 3840 | 5544 | 4000 | 6744 | 5656 |
| 2808 | 1056 | 5760 | 3000 | 5856 | 6408 |
| 1056 | 680 | 5760 | 1256 | 5800 | 5856 |
| 5500 | 5040 | 5775 | 7460 | 7665 | 7975 |
| 5040 | 5292 | 5775 | 7308 | 7833 | 7665 |
| 2295 | 1560 | 5984 | 2775 | 6184 | 6409 |
| 4950 | 1560 | 5984 | 5190 | 6184 | 7766 |
| 2925 | 1100 | 6000 | 3125 | 6100 | 6675 |
| 5280 | 5544 | 6050 | 7656 | 8206 | 8030 |
| 1260 | 4320 | 6237 | 4500 | 7587 | 6363 |
| 3042 | 1144 | 6240 | 3250 | 6344 | 6942 |
| 4070 | 1656 | 6240 | 4394 | 6456 | 7450 |
| 5520 | 5796 | 6325 | 8004 | 8579 | 8395 |
| 5796 | 528 | 6325 | 5820 | 6347 | 8579 |
| 1848 | 1280 | 6336 | 2248 | 6464 | 6600 |
| 4080 | 748 | 6336 | 4148 | 6380 | 7536 |
| 748 | 195 | 6336 | 773 | 6339 | 6380 |
| 3159 | 1188 | 6480 | 3375 | 6588 | 7209 |
| 1188 | 765 | 6480 | 1413 | 6525 | 6588 |
| 5760 | 6048 | 6600 | 8352 | 8952 | 8760 |
| 1155 | 6300 | 6688 | 6405 | 9188 | 6787 |
| 3276 | 1232 | 6720 | 3500 | 6832 | 7476 |
| 4576 | 1755 | 6732 | 4901 | 6957 | 8140 |
| 6000 | 6300 | 6875 | 8700 | 9325 | 9125 |
| 6600 | 6048 | 6930 | 8952 | 9198 | 9570 |
| 1400 | 4800 | 6930 | 5000 | 8430 | 7070 |
| 3393 | 1276 | 6960 | 3625 | 7076 | 7743 |
| 2640 | 1287 | 7020 | 2937 | 7137 | 7500 |
| 2079 | 1440 | 7128 | 2529 | 7272 | 7425 |
| 6240 | 6552 | 7150 | 9048 | 9698 | 9490 |
| 3510 | 1320 | 7200 | 3750 | 7320 | 8010 |
| 1320 | 850 | 7200 | 1570 | 7250 | 7320 |
| 3627 | 1364 | 7440 | 3875 | 7564 | 8277 |
| 1540 | 5280 | 7623 | 5500 | 9273 | 7777 |
| 3744 | 1408 | 7680 | 4000 | 7808 | 8544 |
| 2310 | 1600 | 7920 | 2810 | 8080 | 8250 |
| 3861 | 1452 | 7920 | 4125 | 8052 | 8811 |
| 2565 | 2496 | 7920 | 3579 | 8304 | 8325 |
| 5100 | 935 | 7920 | 5185 | 7975 | 9420 |
| 1452 | 935 | 7920 | 1727 | 7975 | 8052 |