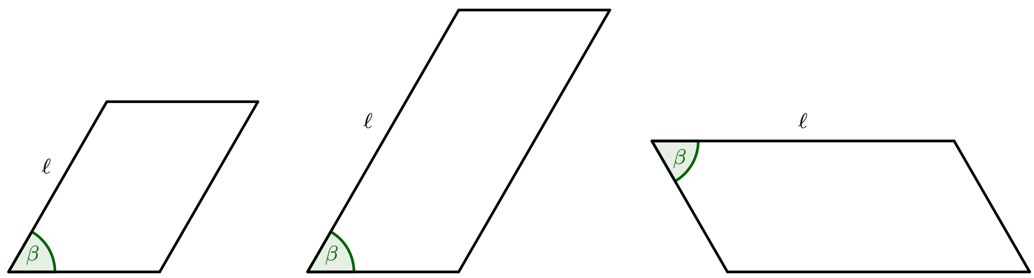
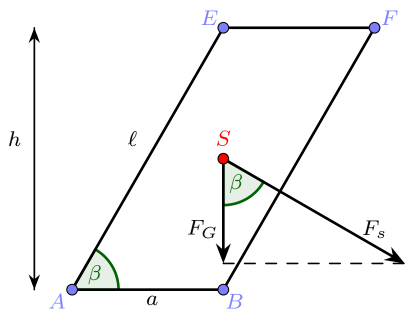
Fallender Spat

Zu sehen ist die Vorderansicht eines Spats. Er besitzt eine quadratische Grundfläche. Seine schrägen Seitenkanten ℓ, die einen Winkel von $\beta = 60°$ mit der Grundfläche einschließen, werden verlängert, bis der Spat umfällt.



Nach welcher Zeit schlägt der Spat auf den Boden auf?

Lösung



Die Grundfläche wird aus den Punkten A, B, C und D gebildet, die Deckfläche aus den Punkten E, F, G und H, eine Kante der quadratischen Grundfläche habe die Länge a. Beim Verlängern der Kante ℓ verschiebt sich der Schwerpunkt S des Spats nach rechts. Überschreitet S beim Verlängern die unter ihm liegende Kante $\overline{BC}$, kippt der Spat um. In der Abbildung bleibt er gerade noch stehen.
Beim Umkippen wirkt auf den Schwerpunkt die Gewichtskraft F_G und eine Kraftkomponente F_s senkrecht zur Fläche $\square BCGF$.
Es ist $\quad cos\ \beta = \frac{F_G}{F_s} \quad F_s = \frac{F_G}{cos\ \beta}$ ...(1).
Der Schwerpunkt dreht sich um die Achse $\overline{BC}$ im Radius $\quad r = \frac{\ell}{2}$.
Es muss ermittelt werden, wie groß die Beschleunigung des Schwerpunktes ist, um Rückschlüsse auf die Beschleunigung am Spatende ziehen zu können. Das Drehmoment M im Schwerpunkt kann mit der Gleichung $M = r \times F_G$ bestimmt werden.
Da $F_S \perp r$, gilt mit (1) $\quad M = F_S \cdot r, \quad M = \frac{F_G \cdot r}{cos\ \beta}$.
Das Drehmoment ist proportional zur Länge des Hebelarms, am Ende des Spates wirkt
das Drehmoment $\quad 2 \cdot M = \frac{F_G \cdot \ell}{cos\ \beta} \quad M = \frac{F_G \cdot \ell}{2 \cdot cos\ \beta}$ ...(2).
Nach dem Grundgesetz der Rotation ist $\quad M = J \cdot \alpha$ ...(3)
und die Winkelbeschleunigung α am Spatende $\quad \alpha = \frac{a_t}{\ell}$ ...(4).
Dabei sind J das Massenträgheitsmoment des umfallenden Spats und a_t die Tangentialbeschleunigung an der oberen Kante $\overline{FG}$. Das Massenträgheitsmoment bei der Rotation um die Kante $\overline{BC}$ beträgt mit der Höhe $h \quad J = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + \ell^2\right) - \frac{m}{2} \cdot a \cdot \sqrt{\ell^2 - h^2}$.
Im Moment des Umkippens ist
$\ell^2 - h^2 = a^2$, so dass $\quad J = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + \ell^2\right) - \frac{m}{2} \cdot a^2 \quad J = \frac{m}{6} \cdot \left(2 \cdot \ell^2 - a^2\right)$ ...(5).
Die äußeren Punkte des Spats bewegen sich gleichmäßig beschleunigt auf einer Kreisbahn der Länge s. Der Winkel β wird in der Zeit t_S überstrichen. Diese Bewegung beschreiben

die Gleichungen	$s = \frac{a_t}{2} \cdot t_S^2$ ...(6) und	$s = \ell \cdot \beta$	...(7).
(6)=(7) mit (4)	$\frac{\alpha \cdot \ell}{2} \cdot t_S^2 = \ell \cdot \beta,$	$t_S^2 = \frac{2 \cdot \beta}{\alpha}$	...(8).
Weiterhin ist mit (2)=(3)	$\frac{F_G \cdot \ell}{2 \cdot cos\ \beta} = J \cdot \alpha,$	$\alpha = \frac{F_G \cdot \ell}{2 \cdot J \cdot cos\ \beta},$	
$F_G = m \cdot g$, mit (5), $\mid : m$	$\alpha = \frac{m \cdot g \cdot \ell}{2 \cdot \frac{m}{6} \cdot (2 \cdot \ell^2 - a^2) \cdot cos\ \beta},$	$\alpha = \frac{g \cdot \ell}{\frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \ell^2 - a^2) \cdot cos\ \beta},$	
$\ell^2 - a^2 = h^2$	$\alpha = \frac{3 \cdot g \cdot \ell}{(\ell + \ell^2 - a^2) \cdot cos\ \beta},$	$\alpha = \frac{3 \cdot g \cdot \ell}{(\ell^2 + h^2) \cdot cos\ \beta},$	
$cos\ \beta = \frac{a}{\ell}$	$\alpha = \frac{3 \cdot g \cdot \ell^2}{(\ell^2 + h^2) \cdot a}$		...(9),
(9) in (8)	$t_S^2 = \frac{2 \cdot \beta \cdot \left(\ell^2 + h^2\right) \cdot a}{3 \cdot g \cdot \ell^2},$	$t_S = \sqrt{\frac{2 \cdot \beta \cdot (\ell^2 + h^2) \cdot a}{3 \cdot g \cdot \ell^2}},$	
$\beta = \frac{\pi}{3}$	$t_S = \frac{1}{3 \cdot \ell} \cdot \sqrt{2\pi \cdot \frac{(\ell^2 + h^2) \cdot a}{g}},$	$\underline{\underline{t_S = \frac{1}{3 \cdot \ell} \cdot \sqrt{2\pi \cdot \frac{a}{g} \cdot (\ell^2 + h^2)}.}}$	

Die Fallzeit des umkippenden Spats beträgt $t_S = \frac{1}{3 \cdot \ell} \cdot \sqrt{2\pi \cdot \frac{a}{g} \cdot (\ell^2 + h^2)}$.

Wenn die Kante $a = 2\ cm$ lang ist und die Kante ℓ bis auf mehr als $4\ cm$ verlängert wird, kippt der Spat um. Nach einer Fallzeit von $t = 0{,}499\ s$ schlägt er auf den Boden auf.