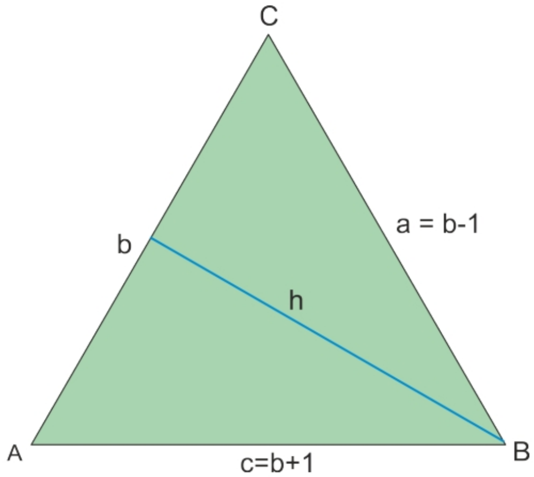
Ein fast gleichseitiges Dreieck

Ein Wald hat die Form eines fast gleichseitigen Dreiecks. Die Seitenlängen sind drei aufeinanderfolgende Ganzzahlen (in Metern). Die Straße, die durch den Wald führt, folgt genau der zur mittleren Dreieckseite senkrecht stehende Höhe h. Sie ist auch eine ganze Zahl (in Metern) lang und zwar mehr als 2010 Meter.
Wie groß ist die Waldfläche mindestens (in m^2).



Aufgabe aus der Zeitschrift „Neues Deutschland", Rätsel der Woche, von Mike Mlynar vom 10. Juli 2021

Lösung

Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC kann bestimmt werden mit den beiden Gleichungen $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$ ...(1) und der Heronschen Flächenformel $A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$, wobei s den halben Umfang des Dreiecks entspricht.

So ist $\quad s = \frac{1}{2} \cdot (b + (b+1) + b - 1), \quad s = \frac{3}{2} \cdot b$

und $\quad A = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot b \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot b - (b-1)\right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot b - b\right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot b - (b+1)\right)},$

$$A = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot b \cdot (\frac{1}{2} \cdot b + 1) \cdot (\frac{1}{2} \cdot b) \cdot (\frac{1}{2} \cdot b - 1)},$$

$$A = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot b^2 \cdot (\frac{1}{4} \cdot b^2 - 1)}, \qquad A = \frac{b}{4} \cdot \sqrt{3 \cdot (b^2 - 4)} \qquad ...(2).$$

(1)=(2) $\quad \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{b}{4} \cdot \sqrt{3 \cdot (b^2 - 4)}, \qquad h = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot b^2 - 3},$

$$4 \cdot h^2 = 3 \cdot (b^2 - 4), \qquad (2 \cdot h)^2 = 3 \cdot (b+2) \cdot (b-2) \qquad ...(3).$$

Wolfram-Mathematica und der Befehl
FindInstance $\left[\left\{(2h)^2 = 3(b-2)(b+2), h > 2010, b > 0\right\}, \{h, b\}, \mathbb{Z}\right]$
$\{\{h \to 2340, b \to 2702\}\}$
findet die Lösung der diophantischen Gleichung (3).
Mit dem Programm Python geht es schneller mit den Befehlen

```
import math
b=10000
for b in range(1000,b+1):
    A=b/4*math.sqrt(3*(b-2)*(b+2))
    if A % 1 ==0:
        h=2*A/b
        print(b,int(h)
```

Die Waldfläche hat eine Größe von $A = \frac{1}{2} \cdot 2702\ m \cdot 2340\ m$, $A = 3161340\ m^2$.

Eine andere Lösungmöglichkeit über die Fermatschen Gleichung soll nun versucht werden.
Ausgehend von (3) $\quad 4 \cdot h^2 = 3 \cdot (b^2 - 4), \qquad b^2 - \frac{4}{3} \cdot h^2 = 4$ ...(4)
können die ersten beiden Lösungen gefunden werden mit $L = \{(b, h) \in \mathbb{N} : (2|0); (4|3)\}$.
Dabei muss b^2 eine durch 4 teilbare Zahl sein.

Mit der Gleichung $\begin{pmatrix} b_{i+1} \\ h_{i+1} \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} b_1 & n \cdot h_1 \\ h_1 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_i \\ h_i \end{pmatrix}$ und $n = \frac{4}{3}$ aus (4)
kann der Wert von a ermittelt werden und danach weitere Lösungen.

Mit $i = 0$ ist $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 4 & \frac{4}{3} \cdot 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{1}{2}.$

Mit $i = 1$ ist $\begin{pmatrix} b_2 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_2 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_2 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix},$

$i = 2$ $\begin{pmatrix} b_3 \\ h_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_3 \\ h_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 104 \\ 90 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_3 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 45 \end{pmatrix},$

$i = 3$ $\begin{pmatrix} b_4 \\ h_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 52 \\ 45 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_4 \\ h_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 388 \\ 336 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_4 \\ h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 194 \\ 168 \end{pmatrix},$

$i = 4$ $\begin{pmatrix} b_5 \\ h_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 194 \\ 168 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_4 \\ h_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1448 \\ 1254 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_4 \\ h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 724 \\ 627 \end{pmatrix},$

$i = 5$ $\begin{pmatrix} b_6 \\ h_6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 724 \\ 627 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_4 \\ h_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5404 \\ 4680 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_4 \\ h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2702 \\ 2340 \end{pmatrix}.$

Der Wert von h ist zum ersten Mal über 2010, somit ist $h = 2340$ und $b = 2702$.