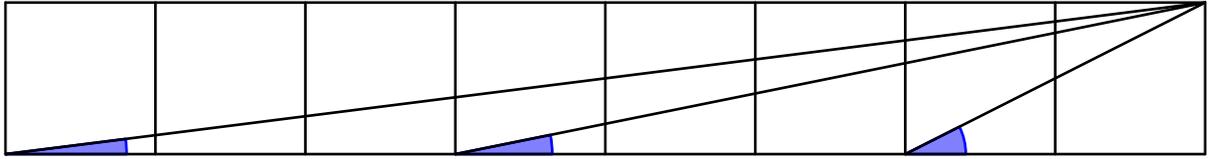


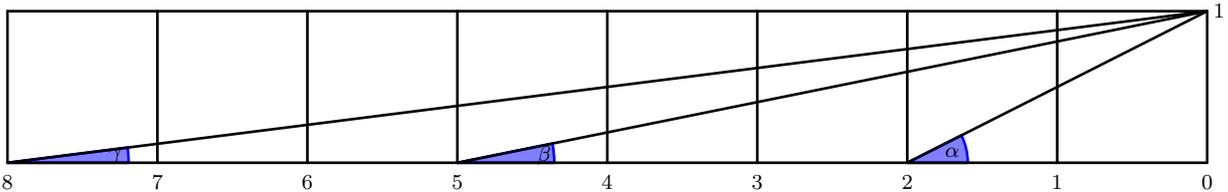
Fibonacci-Winkel

Wie groß ist die Summe der drei blauen Winkel?



Aufgabe von Dr. Eugen Willerding vom 11. April 2021

Lösung



Die Scheitelpunkte der Winkel α , β und γ liegen bei den Fibonacci-Zahlen 2, 5 und 8. Die Summe aller drei Winkel sei φ .

Dann ist
$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \quad \dots(1)$$

Unter https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie#Additionstheoreme findet man bei Wikipedia die Additionstheoreme für die Arkustangensfunktion.

So ist
$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-x \cdot y}\right),$$

auf (1) angewandt
$$\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right),$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right),$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{7}{9}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right),$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{8}}\right),$$

$$\varphi = \arctan(1),$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{65}{72}}{\frac{65}{72}}\right),$$

$$\underline{\underline{\varphi = 45^\circ}}$$

Die Winkelsumme von α , β und γ beträgt 45° .