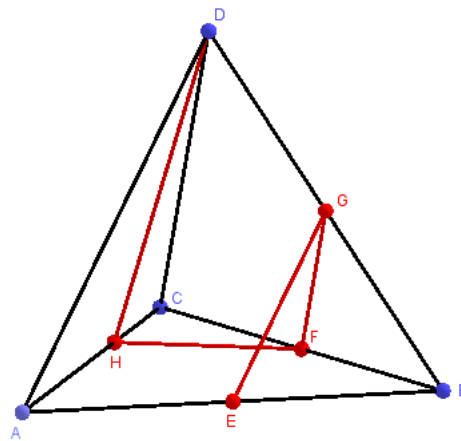


Fliege im Tetraeder

Ein Lampenschirm habe die Form eines regelmäßigen Tetraeders mit den Eckpunkten $ABCD$. Eine Stubenfliege hat sich in das Innere des Schirms verirrt. Sie sitzt zu Beginn der Beobachtung auf dem unteren Rand \overline{AB} in dessen Mitte E . Von dort krabbelt sie aufwärts parallel zur Ebene ACD zum Punkt G auf der Kante \overline{BD} . Sie verlässt den Punkt G unter dem gleichen Winkel den die Strecke \overline{EG} mit \overline{BG} eingeschlossen hat in Richtung des Punktes F auf der Kante \overline{BC} . Vom Punkt F läuft sie quer über den Boden des Lampenschirms zum Punkt H auf der Kante \overline{CA} . Im Punkt H läuft sie ohne Richtungsänderung geradlinig nach oben zur Spitze D des Schirms, von wo die Fliege das Innere verlassen kann.

Wie viel Prozent macht die Strecke \overline{EG} an der Gesamtlänge des Weges s bis zum Punkt D aus?

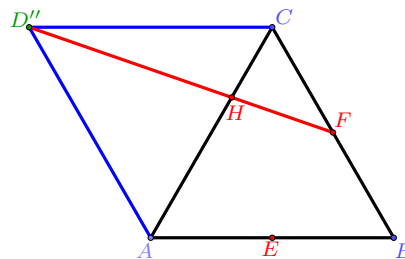
Idee der Aufgabe von Heinrich Hemme, „Die verirrte Fliege im Lampenschirm“, Cogito - Bild der Wissenschaft, Heft 11-2019



Lösung

Beim Lauf der Fliege vom Punkt E zum Punkt F über den Punkt G kommt sie in der Mitte der Kanten \overline{BD} und \overline{BC} an, da die Flächen $\triangle EFG$ und $\triangle ACD$ parallel zueinander verlaufen. Der Tetraeder $EBFG$ hat die Seitenlänge $\frac{a}{2}$.

Klappt man die Seitenfläche ACD in die x-y-Ebene, ist die Strecke $\overline{FD''}$ der Weg vom Punkt F bis zur Spitze D .



$\overline{FD''}$ kann mit dem Kosinussatz berechnet werden, so ist

$$\overline{FD''}^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(60^\circ + 60^\circ), \quad \overline{FD''}^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} - a^2 \cdot \cos(120^\circ),$$

$$\overline{FD''}^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4},$$

$$\overline{FD''}^2 = \frac{7}{4} \cdot a^2,$$

$$\overline{FD''} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot a.$$

$$\text{Dann ist } s = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot a,$$

$$s = \frac{a}{2} \cdot (2 + \sqrt{7}).$$

$$\text{Das Verhältnis beträgt } \frac{\overline{EG}}{s} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2} \cdot (2 + \sqrt{7})},$$

$$\frac{\overline{EG}}{s} = \frac{1}{2 + \sqrt{7}},$$

$$\underline{\underline{\frac{\overline{EG}}{s} = 21,5\%}}$$