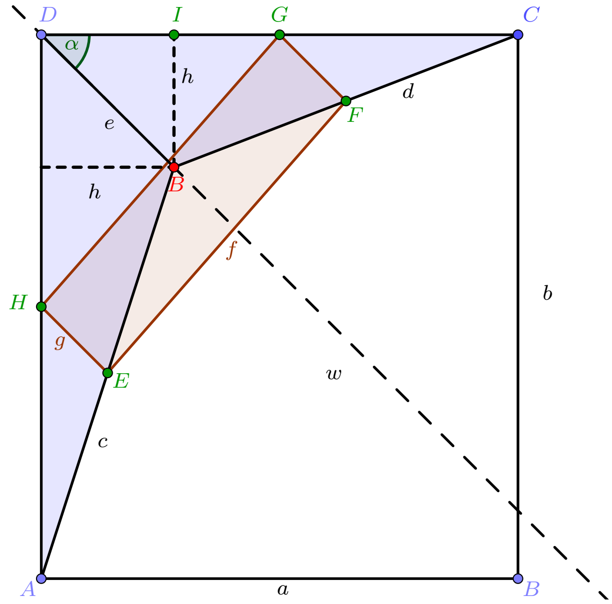
Fläche und Umfang halbieren

Das Rechteck $\square ABCD$ hat die Seitenlängen $a = 7\ cm$ und $b = 8\ cm$. Auf die Winkelhalbierende w durch den Punkt D wird nun der Punkt B gesetzt, die Punkte A, C, D bleiben fest. Es entsteht ein Viereck, bei dem nur noch die Seiten $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ ihre ursprüngliche Länge haben. Verbindet man die Mittelpunkte E, F, G, H jeweils zweier benachbarter Seiten dieses Vierecks, erhält man das sogenannte Varignon-Parallelogramm $\square EFGH$.
Welche Koordinaten muss der Punkt B haben, damit der Flächeninhalt und Umfang des Parallelogramms E, F, G, H halb so groß ist wie der Fläeninhalt und Umfang des Rechtecks A, B, C, D?



Aufgabe der Serie 56, Nr.665 von Thomas Jahre, Chemnitz, vom 26. Februar 2021

Lösung

Der Punkt A wird in den Koordintenursprung gelegt. Der Winkel α ist 45° groß. Der Punkt B hat die Koordinaten $B\,(x|y)$. Die Höhen $h = x$ der Dreiecke ΔABD und ΔBCD sind gleich, da der Punkt B auf der Winkelhalbierenden des rechten Winkels liegt. Es sind die Seiten $c = \overline{AB}$ und $d = \overline{BC}$. Die Dreiecke ΔAEH und ΔABD sind ähnlich, so dass die Strecke $\overline{DB} = e$ doppelt so lang ist wie die Seite g, $\quad e = 2 \cdot g \quad$ ...(1).

Im Dreieck BID ist $\quad e^2 = x^2 + x^2, \quad e = x \cdot \sqrt{2} \quad$ ...(2),

(1)=(2) $\quad 2 \cdot g = x \cdot \sqrt{2}, \quad g = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot x \quad$ ...(3).

Im Dreieck HGD ist $\quad f^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad f = \sqrt{28{,}25} \quad$ ...(4).

Im Dreieck ABD ist $\quad c^2 = (b - x)^2 + x^2, \quad c = \sqrt{(8 - x)^2 + x^2} \quad$ ...(5),

im Dreieck BCD ist $\quad d^2 = (a - x)^2 + x^2, \quad d = \sqrt{(7 - x)^2 + x^2} \quad$ ...(6).

Der Umfang des Vierecks $ABCD$ ist doppelt so groß, wie der Umfang des Parallelogramms.

Damit ist mit (3) bis (6) $\quad a + b + c + d = 2 \cdot 2 \cdot (g + f),$

$$7 + 8 + \sqrt{(8 - x)^2 + x^2} + \sqrt{(7 - x)^2 + x^2} = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x + \sqrt{28{,}25}\right),$$

$$15 + \sqrt{64 - 16 \cdot x + 2 \cdot x^2} + \sqrt{49 - 14 \cdot x + 2 \cdot x^2} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{452},$$

mit Wolfram Mathematica $\quad x = 1{,}94856, \quad y = 8 - 1{,}94856, \quad y = 6{,}05144.$

Der Flächeninhalt des Varignon-Parallelogramms ist immer halb so groß, wie der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$, das auch konkav sein kann.

Der Punkt B hat die Koordinaten $B(1{,}94856 \mid 6{,}05144)$.

Ein Dankeschön an Ingmar Rubin, Berlin, der wichtige Lösungsansätze bereitstellte.

© Bertram