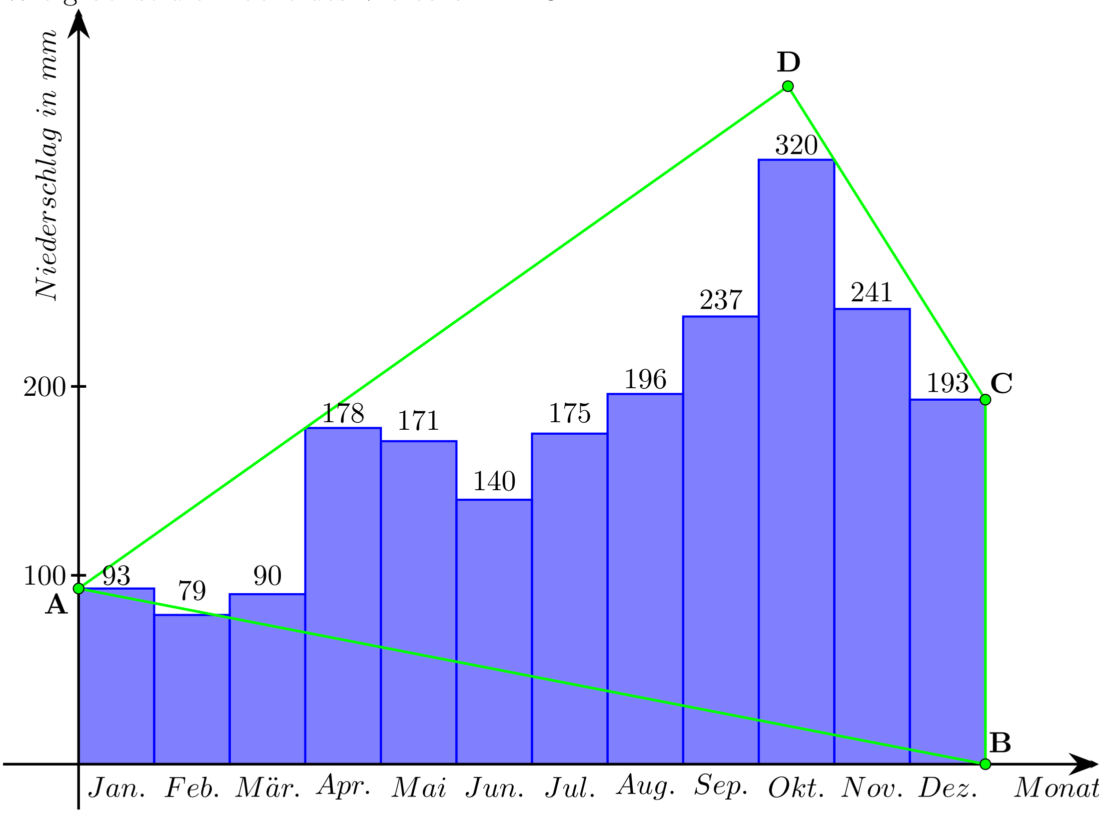
Fläche eines Viereck aus einem Niederschlagsdiagramm

Dargestellt ist das Niederschlagsdiagramm von Medan auf Sumatra (Indonesien). Die Säulen für die Monate sind immer 2,0 cm breit. Der Abstand zwischen 100 mm und 200 mm auf der senkrechten Achse beträgt 4,0 cm. Die Strecke $\overline{AD}$ berührt die Säule im April, die Strecke $\overline{CD}$ berührt die Säule im Oktober. Die Punkte A, B und C liegen auf den Rändern der Fläche des Diagramms.
Wie groß ist die Fläche des Vierecks $\square ABCD$?



Aufgabe der Serie 56, Nr.670 von Thomas Jahre, Chemnitz, vom 2. April 2021

Lösung

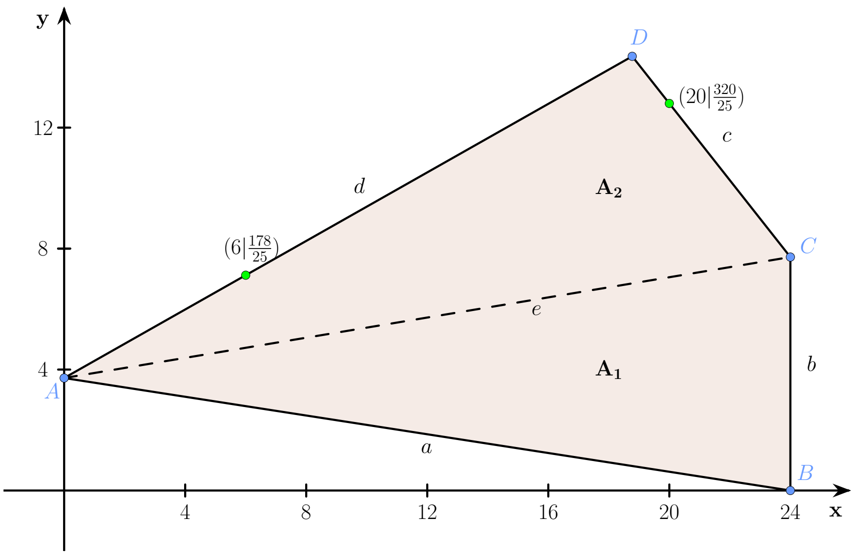
Die Koordinaten der Punkte A, B, C und D müssen bestimmt werden. Es entsprechen 4 cm im Diagramm 100 mm Niederschlag, d.h. der Maßstab ist $M = 1 : 25$. Damit hat der Punkt A die

Koordinaten	$A\left(0\middle\vert\frac{93}{25}\right)$	...(1).
Koordinaten von B:	$B\,(24\vert 0)$	...(2).
Koordinaten von C:	$C\left(24\middle\vert\frac{193}{25}\right)$	...(3).

Der Punkt D ist der Schnittpunkt zweier Geraden g und h durch die Punkte A und $(6|178)$ bzw. C und $(20|320)$ mit den Gleichungen

g:	$y-\frac{93}{25}=\frac{\frac{93}{25}-\frac{178}{25}}{0-6}\cdot(x-0)$,	$y=\frac{17}{30}\cdot x+\frac{93}{25}$	...(4),
h:	$y-\frac{193}{25}=\frac{\frac{193}{25}-\frac{320}{25}}{24-20}\cdot(x-24)$	$y=-\frac{127}{100}\cdot(x-24)+\frac{193}{25}$	...(5),
$g\cap h$, (4)=(5)	$\frac{17}{30}\cdot x+\frac{93}{25}=-\frac{127}{100}\cdot(x-24)+\frac{193}{25}$,	$\frac{170}{127}\cdot x=-\frac{127}{4}\cdot x+\frac{127\cdot 24}{100}+4$,	
	$\frac{551}{300}\cdot x=\frac{862}{25}$,	$x_D=\frac{10344}{551}$,	...(6),
$x_D\in g$, (6) in (4)	$y=\frac{17}{30}\cdot\frac{10344}{551}+\frac{93}{25}$,	$y_D=\frac{197783}{13775}$,	
Koordinaten von D:	$D\left(\frac{10344}{551}\middle\vert\frac{197783}{13775}\right)$		...(7).

Das Viereck $\square ABCD$ wird in zwei Dreiecke ΔABC und ΔACD zerlegt, um deren Flächeninhalte zu bestimmen.



Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ können bestimmt werden, so ist

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 24 \\ -\frac{93}{25} \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} \frac{10344}{551} \\ \frac{29308}{2755} \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \left| det\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \right|, \qquad A_1 = \frac{1}{2} \cdot \left| det\left(\begin{pmatrix} 24 \\ -\frac{93}{25} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|,$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \left| 96 + \frac{93 \cdot 24}{25} \right|, \qquad A_1 = 12 \cdot \left(4 + \frac{93}{25}\right),$$

$$A_1 = 12 \cdot \frac{193}{25} \qquad \underline{\underline{A_1 = \frac{2316}{25}\ FE}},$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \left| det\left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right) \right|, \qquad A_2 = \frac{1}{2} \cdot \left| det\left(\begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{10344}{551} \\ \frac{29308}{2755} \end{pmatrix} \right) \right|,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{703392}{2755} - \frac{41376}{551} \right|, \qquad A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{496512}{2755},$$

$$\underline{\underline{A_2 = \frac{248256}{2755}\ FE}},$$

als Summe

$$A = A_1 + A_2, \qquad A = \frac{2316}{25} + \frac{248256}{2755}$$

$$A = \frac{6628836}{68875}, \qquad \underline{\underline{A = 182{,}75107\ FE}}.$$

Das Viereck $\square ABCD$ hat einen Flächeninhalt von etwas mehr als $A = 182{,}75\ cm^2$.