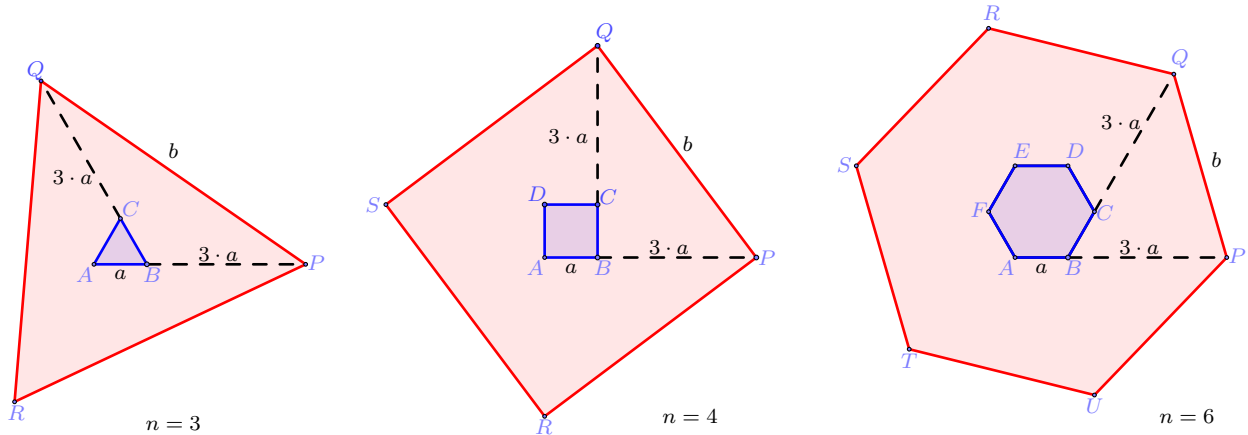


Flächenvergleich von n-Ecken

Die untere und rechts anliegende Seite eines regelmäßigen n-Ecks mit der Seitenlänge a werden entsprechend der Abbildung um das Dreifache verlängert. Es entstehen die Punkte P und Q . Aus der Strecke $b = \overline{PQ}$ wird wieder ein n-Eck mit gleichem n gebildet, das das ursprüngliche n-Eck umschließt. Das Verhältnis der Flächeninhalte beider n-Ecke sei v .

Welchen Grenzwert besitzt v für $n \rightarrow \infty$?



Idee nach einer Aufgabe von Thomas Jahre, Chemnitz, Serie 55 - Aufgabe 651 vom 14.10.2020

Lösung

Mit zunehmender Eckenanzahl n vergrößert sich der Innenwinkel $\alpha = \angle ABC$ des blauen n-Ecks. Dabei ist $\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$. Der Winkel $\angle QBP = \beta$ als Nebenwinkel von α hat eine Größe von

$$\beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}, \quad \beta = \frac{360^\circ}{n} \quad \dots(1).$$

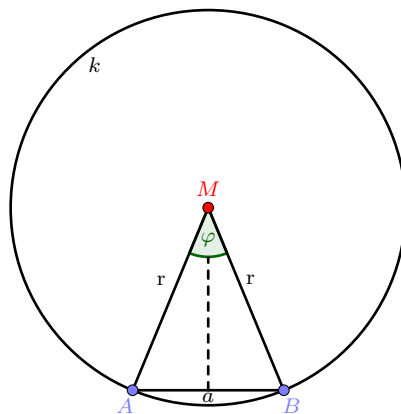
Im Dreieck $\triangle BPQ$ ist

$$b^2 = 9 \cdot a^2 + 16 \cdot a^2 - 24 \cdot a^2 \cdot \cos \beta, \quad b^2 = 25 \cdot a^2 - 24 \cdot a^2 \cdot \cos \beta,$$

mit (1)

$$b^2 = a^2 \cdot \left(25 - 24 \cdot \cos \frac{360^\circ}{n}\right), \quad b = a \cdot \sqrt{25 - 24 \cdot \cos \frac{360^\circ}{n}} \quad \dots(2).$$

Ein regelmäßiges n-Eck setzt sich aus n gleichschenkligen Dreiecken zusammen, die entstehen, wenn man den Mittelpunkt des Umkreises mit den Eckpunkten verbindet. Die Verbindungslinie ist dann jeweils ein Radius r des Umkreises k . Der Winkel am Mittelpunkt des Umkreises sei φ .



Dreiecksfläche $\triangle ABM$

Es ist

(4) in (3)

$$\sin \varphi = \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

(6) in (5)

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{180^\circ}{n},$$

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin \varphi, \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2 \cdot r},$$

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot \sin \varphi}{4 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$$\sin \varphi = 2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}, \quad A_D = \frac{1}{8} \cdot a^2 \cdot \frac{2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$$A_D = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{\tan \frac{180^\circ}{n}}$$

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \varphi \quad \dots(3).$$

$$r = \frac{a}{2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2}}, \quad \dots(4)$$

$$A_D = \frac{1}{8} \cdot a^2 \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad \dots(5)$$

$$A_D = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{\tan \frac{\varphi}{2}}, \quad \dots(6)$$

$$A_D = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{\tan \frac{180^\circ}{n}}, \quad \dots(7).$$

Der Flächeninhalt des n-Ecks ergibt sich aus der Summe aller Dreiecke A_D

$$A_{n-Eck} = n \cdot A_D \quad A_{n-Eck} = \frac{n}{4} \cdot \frac{a^2}{\tan \frac{180^\circ}{n}} \quad \dots(8).$$

$$\text{Dann ist mit (8)} \quad A_{blau} = \frac{n \cdot a^2}{4 \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}}, \quad \dots(9)$$

$$\text{und} \quad A_{rot} = \frac{n \cdot b^2}{4 \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}},$$

$$\text{mit (2)} \quad A_{rot} = \frac{n \cdot a^2 \cdot \left(25 - 24 \cdot \cos \frac{360^\circ}{n}\right)}{4 \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}} \quad \dots(10).$$

$$\text{Das Verhltnis } v = \frac{A_{rot}}{A_{blau}} \text{ ist} \quad v = \frac{\frac{n \cdot a^2 \cdot \left(25 - 24 \cdot \cos \frac{360^\circ}{n}\right)}{4 \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}}}{\frac{n \cdot a^2}{4 \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}}}, \quad \underline{\underline{v = 25 - 24 \cdot \cos \frac{360^\circ}{n}}}$$

$$\text{Fur } v(n) \text{ mit } n \rightarrow \infty \text{ gilt} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(25 - 24 \cdot \cos \frac{360^\circ}{n}\right),$$

$$\text{Grenzwert } \lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = G \quad G = 25 - 24 \cdot 1 \quad \underline{\underline{G = 1}}$$

Fur Vielecke mit großem n nahert sich der Facheninhalt des roten n-Ecks dem Facheninhalt des blauen n-Ecks an, obwohl zwei Seiten des blauen n-Ecks vervierfacht wurden!

Nur drei Verhltnisse $v(n)$ werden ganzzahlig $v(3) = 37$, $v(4) = 25$ und $v(6) = 13$.

