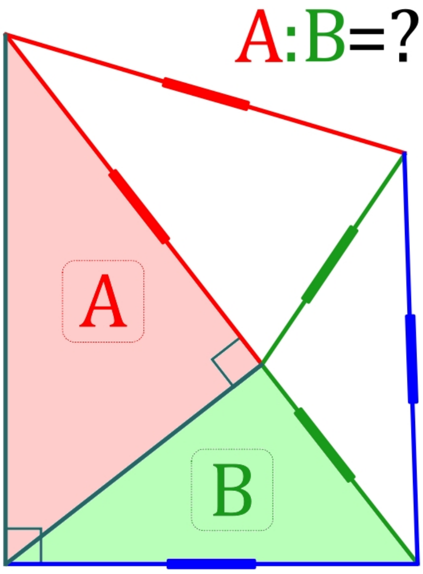
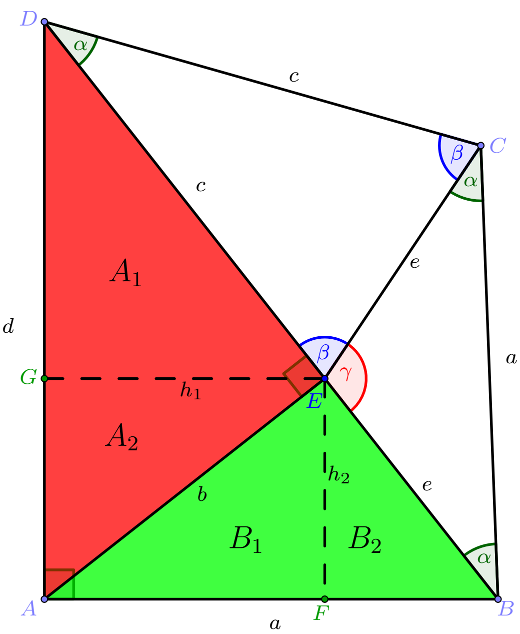
Flächenverhältnis gesucht

Welches Flächenverhältnis $A : B$ besteht in der Figur?



Aufgabe von Dr. Eugen Willerding vom 28. April 2022

Lösung



Die Dreiecke ΔBCE und ΔECD sind gleichschenklig, so dass das Dreieck ΔBCD ebenfalls gleichschenklig ist mit der Basis $e + c$. Damit ist $a = c$.

Im Dreieck ΔECD ist	$\alpha + 2 \cdot \beta = 180°$ $\quad \vert \cdot 3$,	$3 \cdot \alpha + 6 \cdot \beta = 540°$	...(1),
im Dreieck ΔBCD ist		$3 \cdot \alpha + \beta = 180°$	...(2),
(1)-(2)	$5 \cdot \beta = 360°$,	$\beta = 72°$,	
β in (2)	$3 \cdot \alpha + 72° = 180°$,	$\alpha = 36°$,	
im Dreieck ΔBCE ist	$2 \cdot \alpha + \gamma = 180°$,	$\gamma = 108°$.	

Das Dreieck ΔECD mit diesen besonderen Winkelmaßen wird als goldenes Dreieck bezeichnet, die ähnlichen Dreiecke ΔBCE und ΔBCD als goldenes Gnomon. Beim goldenen Dreieck stehen die Seitenlängen im Verhältnis $c : c : e = 1 : \Phi : \Phi$, beim goldenen Gnomon im Verhältnis $a : e : e = \Phi : \Phi : 1$ ...(3). Dabei ist $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ des Goldenen Schnitts. Es wird ein goldenes Gnomon in ein goldenes Gnomon und ein goldenes Dreieck aufgeteilt.

Die Dreiecke $\Delta ABE = B_1 + B_2$ und $\Delta GED = A_1$ sind nach dem Kongruenzsatz wsw kongruent.

Dann ist mit $A_1 = B$ $\quad \frac{A}{B} = \frac{A_1+A_2}{B}, \quad \frac{A}{B} = 1 + \frac{A_2}{B},$

$$\frac{A}{B} = 1 + \frac{\frac{h_1 \cdot h_2}{2}}{\frac{a \cdot h_2}{2}}, \quad \frac{A}{B} = 1 + \frac{h_1}{a} \quad ...(4).$$

Die Dreiecke ΔABE und ΔAEG sind zueinander ähnlich.

Dann ist $\quad \frac{h_1}{b} = \frac{b}{a}, \quad h_1 = \frac{b^2}{a} \quad ...(5),$

(5) in (4), $b^2 = a^2 - e^2$ $\quad \frac{A}{B} = 1 + \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{A}{B} = 1 + \frac{a^2-e^2}{a^2},$

mit (3) $\quad \frac{A}{B} = 1 + 1 - \frac{e^2}{a^2}, \quad \frac{A}{B} = 2 - \frac{1}{\Phi^2},$

$$\frac{A}{B} = 2 - \frac{4}{(1+\sqrt{5})^2}, \quad \frac{A}{B} = 2 - \frac{4}{1+2\cdot\sqrt{5}+5},$$

$$\frac{A}{B} = 2 - \frac{2}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}, \quad \frac{A}{B} = 2 - \frac{6-2\cdot\sqrt{5}}{4},$$

$$\frac{A}{B} = 2 - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{A}{B} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\frac{A}{B} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \underline{\underline{\frac{A}{B} = \Phi.}}$$

Die beiden Flächen A und B stehen im Verhältnis des Goldenen Schnitts.

Nachweis für die Richtigkeit der Verhältnisse beim goldenen Dreieck und goldenem Gnomon

1. Nachweis von $\frac{c}{e} = \Phi$ im goldenen Dreieck mit Hilfe des Satzes von Stewart (1717–1785):

Nach Stewart ist im ΔBCD $\quad c \cdot a^2 + e \cdot c^2 = (e+c) \cdot (e^2 + e \cdot c),$

$$c \cdot a^2 + c^2 \cdot e = e^3 + 2 \cdot c \cdot e^2 + c^2 \cdot e,$$

$$c \cdot a^2 = e^3 + 2 \cdot c \cdot e^2, \quad a^2 = \frac{e^2}{c} \cdot (e + 2 \cdot c) \quad ...(6).$$

$\Delta GED \sim \Delta ABE$ $\quad \frac{h_1}{c} = \frac{e}{a}, \quad h_1 = \frac{c \cdot e}{a} \quad ...(7),$

(5)=(7), $b^2 = a^2 - e^2$ $\quad \frac{b^2}{\cancel{a}} = \frac{c \cdot e}{\cancel{a}}, \quad a^2 - e^2 = c \cdot e \quad ...(8),$

(6) in (8), $| : e \neq 0$ $\quad \frac{e^2}{c} \cdot (e + 2 \cdot c) - e^2 = c \cdot e, \quad e^3 + 2 \cdot c \cdot e^2 - c \cdot e^2 = c \cdot e,$

$$e^2 + c \cdot e - c = 0, \quad e_{1,2} = -\frac{1}{2} \cdot c \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + c},$$

negative Lösung entfällt $\quad e = -\frac{1}{2} \cdot c + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot c, \quad \frac{e}{c} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1},$

$$\frac{c}{e} = \frac{2 \cdot (1+\sqrt{5})}{4}, \quad \frac{c}{e} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\frac{c}{e} = \Phi \quad \text{w.z.b.w.} \quad ...(9).$$

2. Nachweis von $\frac{a}{e} = \Phi$ im goldenen Gnomon:

$c = \Phi \cdot e$ aus (9) in (8) $\quad a^2 - e^2 = \Phi \cdot e \cdot e, \quad a^2 = e^2 \cdot (\Phi + 1),$

$$\frac{a^2}{e^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1, \quad \frac{a^2}{e^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{2},$$

$$\frac{a^2}{e^2} = \frac{6+2\cdot\sqrt{5}}{4}, \quad \frac{a^2}{e^2} = \frac{1+2\cdot\sqrt{5}+5}{4},$$

$$\frac{a^2}{e^2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \quad \frac{a^2}{e^2} = \Phi^2,$$

$$\frac{a}{e} = \Phi \quad \text{w.z.b.w.}$$

Es großes Dankeschön geht an Dr. Eugen Willerding für die Bereitstellung der Aufgabe nebst dem Satz von Stewart.