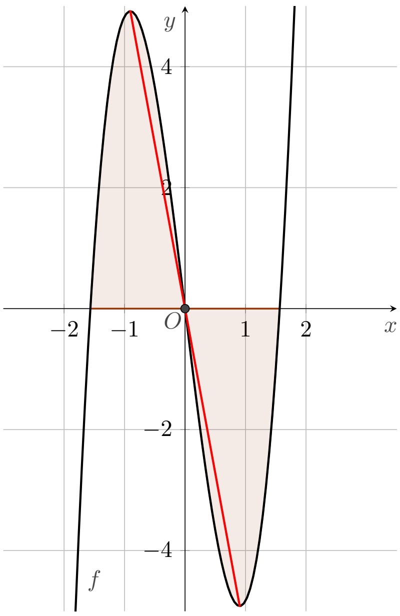
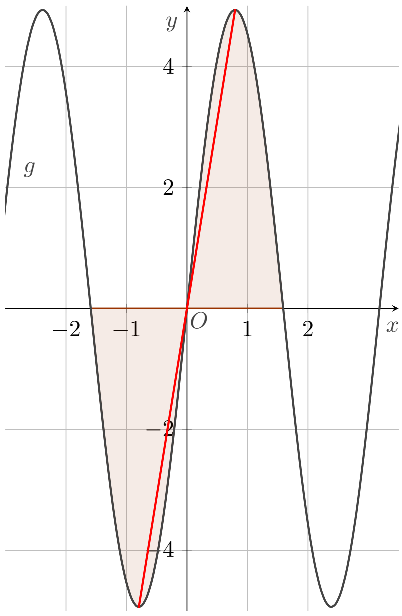
Funktionen dritten Grades und Sinusfunktionen werden gesucht

Gesucht sind alle ganzrationalen Funktionen f dritten Grades und Sinusfunktionen g, deren Graphen gemäß der Abbbildungen

- punktsymmetrisch zum Ursprung sind,
- einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt besitzen, die voneinander einen Abstand von 10 LE haben,
- mit der x-Achse ein Flächenstück von 10 FE einschließen.



(a) ganzrationale Funktion 3. Grades



(b) Sinusfunktion

Idee nach einer Aufgabe von Heinz Klaus Strick, Problem des Monats Dezember 2019

Lösung

Form der Funktion	$f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x$	$f(x)=a\cdot sin\left(b\cdot x\right)$	
Nullstellen	$x_{N_0}=0,\ x_{N_{1,2}}=\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$	$x_{N_0}=0,\ x_{N_{1,2}}=\pm\frac{\pi}{b}$	
Extrema	$P_{1,2}\left(\mp\sqrt{-\frac{b}{3\cdot a}}\middle\vert\pm\frac{2}{3}\cdot b\cdot\sqrt{-\frac{b}{3\cdot a}}\right)$	$P_{1,2}\left(\mp\frac{\pi}{2\cdot b}\middle\vert\mp a\right)$	
Länge der Strecke $\overline{P_1P_2}$	$10=\sqrt{-\frac{4}{3}\cdot\frac{b}{a}-\frac{16}{27}\cdot\frac{b^3}{a}}$	$10=\sqrt{\frac{\pi^2}{b^2}+4\cdot a^2}$	...(1)
umgeformt	$a=-\frac{1}{675}\cdot b\cdot\left(9+4\cdot b^2\right)$	$a=\pm\sqrt{25-\frac{\pi^2}{4\cdot b^2}}$	
Fläche	$A=2\cdot\int\limits_0^{x_{N_2}} f\left(x\right)\cdot dx$	$A=2\cdot\int\limits_0^{x_{N_2}} g\left(x\right)\cdot dx$	
Stammmfunktion	$-5=\left[a\cdot\frac{x^4}{4}+b\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{-\frac{b}{a}}}$	$5=a\cdot\left[-\frac{cos(b\cdot x)}{b}\right]_0^{\frac{\pi}{b}}$	
mit Grenzen, umgeformt	$a=\frac{b^2}{20}$	$a=\frac{5}{2}\cdot b$	...(2)
(1)=(2)	$-\frac{1}{675}\cdot b\cdot\left(9+4\cdot b^2\right)=\frac{b^2}{20}$	$\sqrt{25-\frac{\pi^2}{4\cdot b^2}}=\frac{5}{2}\cdot b$	
vereinfacht	$b^2+\frac{135}{16}\cdot b+\frac{9}{4}=0$	$b^4-4\cdot b^2+\frac{\pi^2}{4}=0$	
$b=\pm\sqrt{2-\frac{1}{5}\cdot\sqrt{100-\pi^2}}$ entfällt	$b_{1,2}=-\frac{3}{32}\cdot\left(45\pm\sqrt{29}\cdot\sqrt{61}\right)$	$b_{1,2}=\pm\sqrt{2+\frac{1}{5}\cdot\sqrt{100-\pi^2}}$	

Zusammenfassung

Fallunterscheidung für die ganzrationale Funktion $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$ dritten Grades:

Für $a > 0 \wedge b < 0$: $b_1 = -\frac{3}{32} \cdot \left(45 + \sqrt{29} \cdot \sqrt{61}\right)$, $a_1 = \frac{81}{2048} \cdot \left(45 + \sqrt{29} \cdot \sqrt{61}\right) - \frac{9}{80}$,
$b_2 = -\frac{3}{32} \cdot \left(45 - \sqrt{29} \cdot \sqrt{61}\right)$, $a_2 = \frac{81}{2048} \cdot \left(45 - \sqrt{29} \cdot \sqrt{61}\right) - \frac{9}{80}$.

Für $a < 0 \wedge b > 0$: $b_3 = \frac{3}{32} \cdot \left(45 + \sqrt{29} \cdot \sqrt{61}\right)$, $a_3 = -\frac{81}{2048} \cdot \left(45 + \sqrt{29} \cdot \sqrt{61}\right) - \frac{9}{80}$,
$b_4 = \frac{3}{32} \cdot \left(45 - \sqrt{29} \cdot \sqrt{61}\right)$, $a_4 = -\frac{81}{2048} \cdot \left(45 - \sqrt{29} \cdot \sqrt{61}\right) - \frac{9}{80}$.

Fallunterscheidung für die Sinusfunktion $g(x) = a \cdot sin\,(b \cdot x)$:

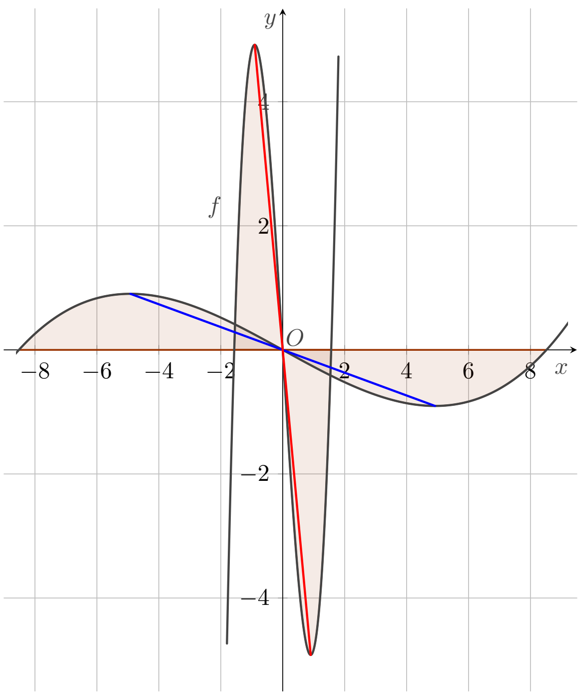
Für $a < 0 \wedge b < 0$: $b_1 = -\sqrt{2 + \frac{1}{5} \cdot \sqrt{100 - \pi^2}}$, $a_1 = -\frac{5}{2} \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{5} \cdot \sqrt{100 - \pi^2}}$.

Für $a > 0 \wedge b < 0$: $b_2 = -\sqrt{2 + \frac{1}{5} \cdot \sqrt{100 - \pi^2}}$, $a_2 = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{5} \cdot \sqrt{100 - \pi^2}}$.

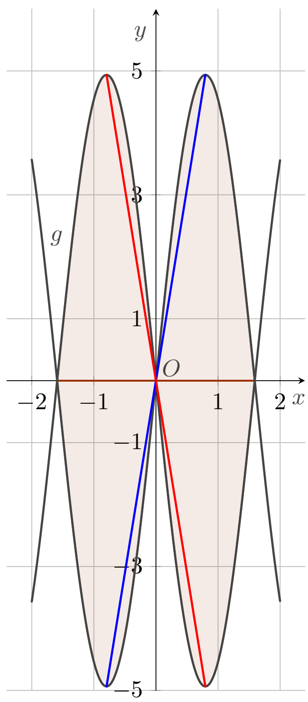
Für $a < 0 \wedge b > 0$: $b_3 = \sqrt{2 + \frac{1}{5} \cdot \sqrt{100 - \pi^2}}$, $a_3 = -\frac{5}{2} \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{5} \cdot \sqrt{100 - \pi^2}}$.

Für $a > 0 \wedge b > 0$: $b_4 = \sqrt{2 + \frac{1}{5} \cdot \sqrt{100 - \pi^2}}$, $a_4 = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{5} \cdot \sqrt{100 - \pi^2}}$.

Die Funktionen $g_1(x) = a_1 \cdot sin\,(b_1 \cdot x)$ und $g_4(x) = a_4 \cdot sin\,(b_4 \cdot x)$ sind identisch,
wie auch die Funktionen $g_2(x) = a_2 \cdot sin\,(b_2 \cdot x)$ und $g_3(x) = a_3 \cdot sin\,(b_3 \cdot x)$.



(a) ganzrationale Funktion 3. Grades



(b) Sinusfunktion