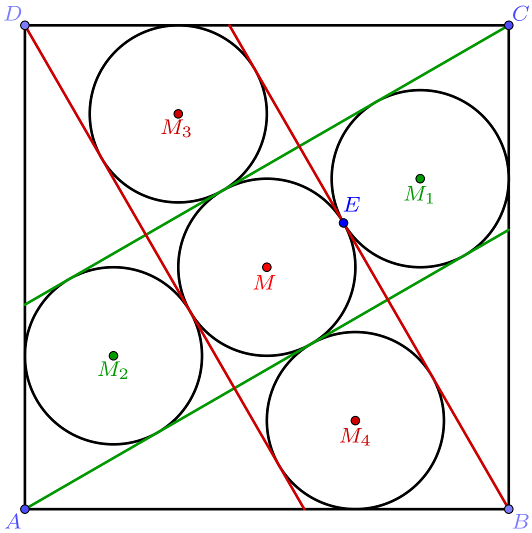
Fünf Kreise im Quadrat

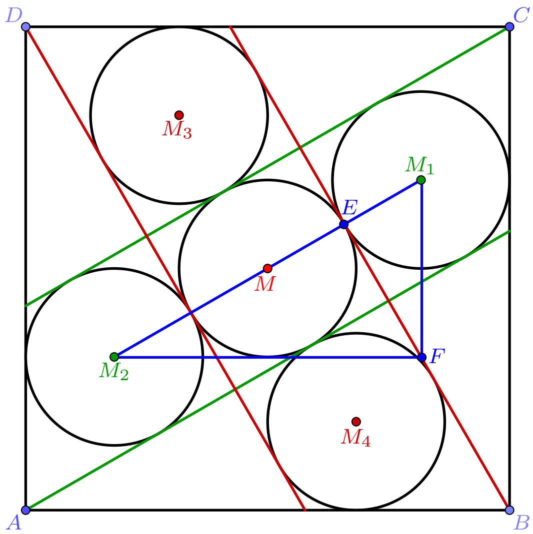
Gegeben sei ein Quadrat ABCD mit der Seitenänge a. In dem Quadrat werden fünf gleichgroße Kreise so angeordnet, dass sich je zwei Kreise in einem Punkt berühern. Weiterhin haben je drei Kreise zwei gemeinsame, parallele Tangenten, wobei jeweils eine davon in einem Eckpunkt des Quadrates beginnt.

a) Wie groß ist der Radius r der fünf Kreise in Abhängigkeit von a?

b) Welche Koordinaten besitzt der Punkt E, wenn der Punkt M im Koordinatenursprung liegt?



Aufgabe aus der Japanischen Tempelgeometrie, wobei kunstvoll bemalte Holztafeln (Sangaku) als Vorlage dienten.



Lösung

a) Im ΔM_2FM_1 gilt $\quad \overline{M_2F}^2 = \overline{M_1M_2}^2 - \overline{M_1F}^2, \quad \overline{M_2F}^2 = (4\cdot r)^2 - (2\cdot r)^2,$

$\overline{M_2F} = 2\cdot\sqrt{3}\cdot r.$

Die Seite a ist dann $\quad a = r + \overline{M_2F} + r, \quad a = 2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot r.$

Damit ist der Radius $\quad r = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+1}, \quad r = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1},$

$\underline{\underline{r = \frac{a}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right).}}$

b) Der Punkt E liegt auf den Kreis um M und in der Mitte von M und M_1.
Seine y-Koordinate ist $y_E = \frac{r}{2}$.
y_E in die Kreisgleichung $x_E^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2$ $\qquad x_E = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot r$.
Der Punkt E hat die Koordinaten $E\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot r \middle| \frac{r}{2}\right)$.