

Fünf Zahlenstreifen

Die ganzen Zahlen $1, 2, \dots, n$ sind auf einem langen Streifen Papier aufgeschrieben. Wir schneiden den Streifen in 5 Stücke, sodass jedes Stück zumindest eine Zahl enthält. Der Durchschnitt der Zahlen auf den fünf Stücken ist 1234, 345, 128, 19 und 9,5.

Berechne n .

Aufgabe aus <https://www.zahlenjagd.at>, Aufgabe des Monats November 2020

Lösung

Die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen ist $n + (n + 1) = 2 \cdot n + 1$... (1),

die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist $n + (n + 1) + (n + 2) = 3 \cdot n + 3$, ... (2),

die Summe von vier aufeinanderfolgenden Zahlen ist $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4 \cdot n + 6$... (3),

bzw.

mit $m = 2$ und (1) $n + (n + 1) = 2 \cdot n + \frac{m \cdot (m-1)}{2}$,

mit $m = 3$ und (2) $n + (n + 1) = 3 \cdot n + \frac{m \cdot (m-1)}{2}$,

mit $m = 4$ und (3) $n + (n + 1) = 4 \cdot n + \frac{m \cdot (m-1)}{2}$.

Die Summe von m aufeinanderfolgenden Zahlen ist dann

$$\begin{aligned} n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + m - 1) &= m \cdot n + \frac{m \cdot (m-1)}{2}, \\ n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + m - 1) &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot (2 \cdot n + m - 1) \end{aligned} \quad \dots(4).$$

Der Durchschnitt d von m Zahlen beträgt

$$d = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot (2 \cdot n + m - 1)}{m}, \quad d = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot n + m - 1) \quad \dots(5).$$

Der erste Streifen hat den Durchschnitt 9,5 und fängt mit der Zahl $n_1 = 1$ an, so dass

$$\text{mit (5)} \quad 9,5 = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 1 + m_1 - 1), \quad m_1 = 18.$$

Auf dem ersten Streifen stehen die Zahlen von **1 bis 18**.

Der zweite Streifen fängt mit der Zahl $n_2 = 19$ an und hat den Durchschnitt 19. Dann ist

$$\text{mit (5)} \quad 19 = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 19 + m_2 - 1), \quad m_2 = 1.$$

Auf dem zweiten Streifen steht nur die Zahl **19**.

Der dritte Streifen fängt mit der Zahl $n_3 = 20$ an und hat den Durchschnitt 128. Dann ist

$$\text{mit (5)} \quad 128 = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 20 + m_3 - 1), \quad 256 = 39 + m_3 \quad m_3 = 217.$$

Der dritte Streifen hat 217 Zahlen, es stehen darauf die Zahlen von **20 bis 236**.

Der vierte Streifen fängt mit der Zahl $n_4 = 237$ an und hat den Durchschnitt 345. Dann ist

$$\text{mit (5)} \quad 345 = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 237 + m_4 - 1), \quad 690 = 473 + m_4 \quad m_4 = 217.$$

Der vierte Streifen hat 217 Zahlen, es stehen darauf die Zahlen von **237 bis 453**.

Der fünfte Streifen fängt mit der Zahl $n_5 = 454$ an und hat den Durchschnitt 1234. Dann ist

$$\text{mit (5)} \quad 1234 = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 454 + m_5 - 1), \quad 2468 = 907 + m_5 \quad m_5 = 1561.$$

Der fünfte Streifen hat 1561 Zahlen, es stehen darauf die Zahlen von **454 bis 2014**.

Die Zahl ist $n = 2014$.