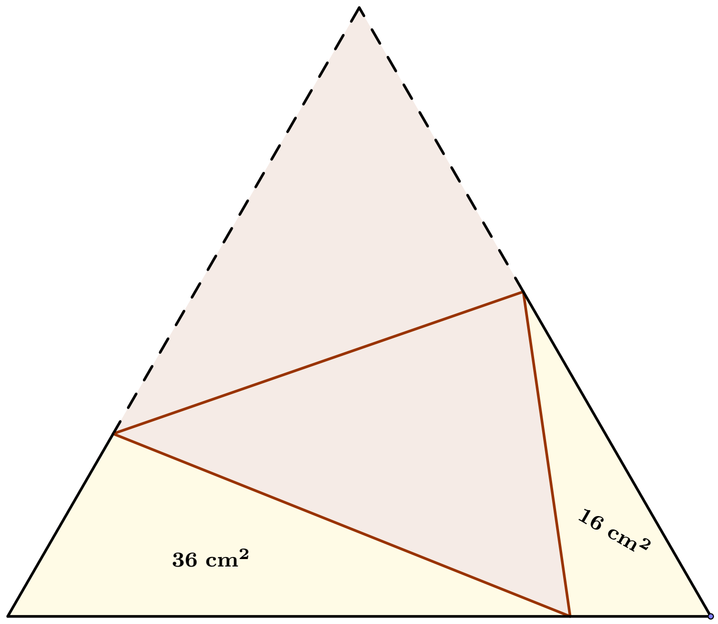
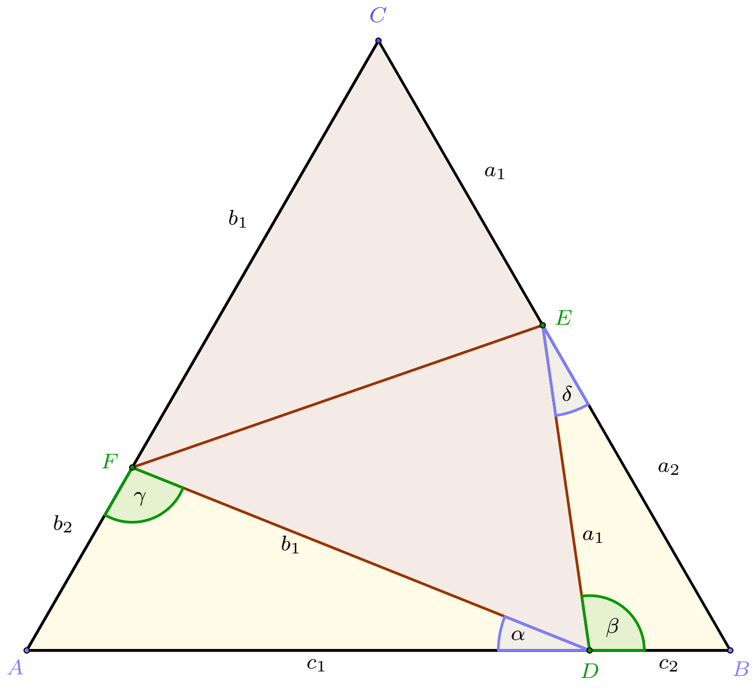
Das gefaltete gleichseitige Dreieck

Ein Blatt Papier, das die Form eines gleichseitigen Dreiecks hat, wird so gefaltet, dass seine obere Spitze auf die Grundseite fällt und die beiden Flächen, in denen das Papier nicht doppelt liegt, Inhalte von 36 cm^2 bzw. 16 cm^2 haben.
Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks insgesamt?



Aufgabe von Aufgabe Christoph Sievert, Monoid, Heft 140 vom Dezember 2019, Seite 25, Aufgabe 1254

Lösung



Im Punkt D sind $\alpha + \beta = 120°$. Im Dreieck ΔADF sind $\alpha + \gamma = 120°$. $\Rightarrow \quad \beta = \gamma$

Im Dreieck ΔDBE sind $\beta + \delta = 120°$. $\Rightarrow \quad \alpha = \delta$

Die Dreiecke ΔADF und ΔDBE sind einander ähnlich.
Bei ähnlichenlichen Dreiecken gilt:
„Die Flächeninhalte zweier Dreiecke steigen wie die Quadrate entsprechender Seitenlängen.“

So ergeben sich die Verhältnisse $\sqrt{\frac{A_{\Delta ADF}}{A_{\Delta DBE}}} = \frac{c_1}{a_2}, \quad \sqrt{\frac{36\ cm^2}{16\ cm^2}} = \frac{3}{2}, \quad \frac{b_1}{a_1} = \frac{3}{2}, \quad \frac{b_2}{c_2} = \frac{3}{2}$ ...(1).

Die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks sei a.

Dann sind $c_1 = \frac{3}{2} \cdot a_2, \quad c_1 = \frac{3}{2} \cdot (a - a_1)$ ...(2),

und $c_2 = \frac{2}{3} \cdot b_2, \quad c_2 = \frac{2}{3} \cdot (a - b_1)$ ...(3).

Nun ist $a = c_1 + c_2$, mit(2), (3) $a = \frac{3}{2} \cdot (a - a_1) + \frac{2}{3} \cdot (a - b_1), \quad \frac{7}{6} \cdot a = \frac{3}{2} \cdot a_1 + \frac{2}{3} \cdot b_1$

und (1) $\frac{7}{6} \cdot a = b_1 + \frac{2}{3} \cdot b_1 \quad \frac{7}{6} \cdot a = b_1 + \frac{2}{3} \cdot b_1$

$\frac{7}{6} \cdot a = \frac{5}{3} \cdot b_1 \quad b_1 = \frac{7}{10} \cdot a$ ...(4).

b_1 in (1) eingesetzt, liefert $\Rightarrow \quad a_1 = \frac{7}{15} \cdot a$ ...(5).

Betrachtet man die vier Dreiecksflächen des gleichseitigen Dreiecks, erhält man

$$A_{ABC} = 2 \cdot A_{DEF} + 16 + 36,$$

$$\frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} + 52,$$

$$a^2 = 2 \cdot a_1 \cdot b_1 + \frac{208}{\sqrt{3}} \qquad ...(6).$$

Mit (4) und (5) in (6) entsteht $a^2 = 2 \cdot \frac{7}{15} \cdot a \cdot \frac{7}{10} \cdot a + \frac{208}{\sqrt{3}},$

$$\frac{26}{75} \cdot a^2 = \frac{208}{\sqrt{3}}, \qquad a^2 = \frac{600}{\sqrt{3}},$$

$$a^2 = 200 \cdot \sqrt{3} \qquad a = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3}.$$

Flächeninhalt ΔABC: $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{600}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}, \quad \underline{\underline{A_{\Delta ABC} = 150\ FE}}.$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC beträgt $A_{\Delta ABC} = 150\ cm^2$.