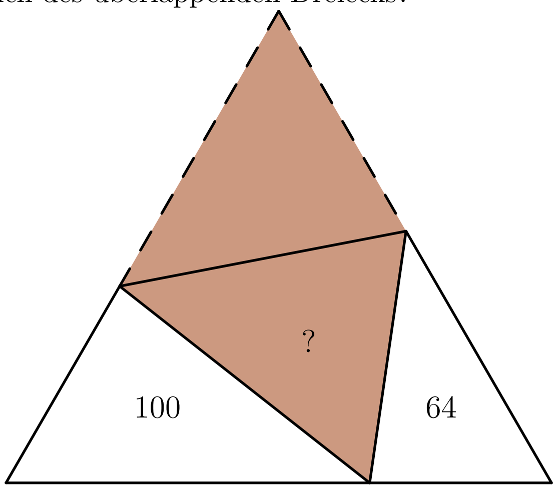
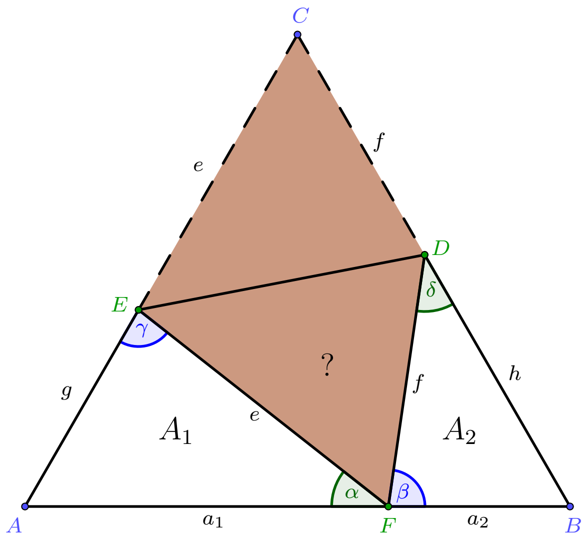
Das gefaltete gleichseitige Dreieck

Ein gleichseitiges Dreieck wird so gefaltet, dass eine Spitze genau auf die gegenüberliegende Seite trifft und die Flächen der beiden neu gebildeten nicht überlappenden Dreiecke 100 und 64 betragen.
Wie groß ist der Bereich des überlappenden Dreiecks?



Aufgabe von Bilal Sarımeşeli auf `https://twitter.com/bilalsarimeseli/status/1517322741023535104` vom 22. April 2022, gefunden von Andreas Grieser, Greifswald

Lösung



Im Punkt F sind $\alpha + \beta = 120°$. Im Dreieck ΔAFE sind $\alpha + \gamma = 120°$. $\Rightarrow \quad \beta = \gamma$
Im Dreieck ΔFBD sind $\beta + \delta = 120°$. $\Rightarrow \quad \alpha = \delta$
Die Dreiecke ΔAFE und ΔFBD sind einander ähnlich. Bei ähnlichenlichen Dreiecken gilt:
„Die Flächeninhalte zweier Dreiecke steigen wie die Quadrate entsprechender Seitenlängen.“
So ergeben sich die Verhältnisse $\sqrt{\frac{A_{\Delta AFE}}{A_{\Delta FBD}}} = \frac{a_1}{h}$, $\sqrt{\frac{100\ FE}{64\ FE}} = \frac{5}{4}$, $\frac{g}{a_2} = \frac{5}{4}$, $\frac{e}{f} = \frac{5}{4}$ ...(1).
Die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks sei a.

Dann ist mit (1)	$a_1 = \frac{5}{4} \cdot h,$	$a_1 = \frac{5}{4} \cdot (a - f)$	...(2),
und noch einmal mit (1)	$a_2 = \frac{4}{5} \cdot g,$	$a_2 = \frac{4}{5} \cdot (a - e)$	...(3).
Nun ist $a = a_1 + a_2$, mit(2), (3)	$a = \frac{5}{4} \cdot (a - f) + \frac{4}{5} \cdot (a - e),$	$\frac{21}{20} \cdot a = \frac{5}{4} \cdot f + \frac{4}{5} \cdot e,$	
und wieder mit (1)	$\frac{21}{20} \cdot a = \frac{5}{4} \cdot f + f,$	$\frac{21}{20} \cdot a = \frac{9}{4} \cdot f,$	
	$f = \frac{7}{15} \cdot a$		...(4),
(4) in (1)	$e = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{15} \cdot a,$	$e = \frac{7}{12} \cdot a$	...(5).

Betrachtet man die vier Dreiecksflächen des gleichseitigen Dreiecks, erhält man

	$A_{ABC} = 2 \cdot A_{DEF} + A_1 + A_2$		...(6).
$sin\ 60° = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} + 164,$		
	$a^2 = 2 \cdot e \cdot f + \frac{656}{\sqrt{3}}$		...(7).
Mit (4) und (5) in (7) entsteht	$a^2 = 2 \cdot \frac{7}{15} \cdot a \cdot \frac{7}{12} \cdot a + \frac{656}{\sqrt{3}},$	$a^2 = \frac{49}{90} \cdot a^2 + \frac{656}{\sqrt{3}},$	
	$\frac{41}{90} \cdot a^2 = \frac{656}{\sqrt{3}},$	$a^2 = \frac{1440}{\sqrt{3}}$	...(8),
	$a^2 = 480 \cdot \sqrt{3},$	$a = 4 \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt[4]{3}.$	
Flächeninhalt ΔABC mit (8)	$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1440}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3},$	$A_{\Delta ABC} = 360$	...(9),
Flächeninhalt ΔDEF mit (6), (9)	$2 \cdot A_{\Delta DEF} = 360 - 164,$	$\underline{\underline{A_{\Delta DEF} = 98\ FE.}}$	

Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔDEF beträgt $A_{\Delta DEF} = 98\ FE$.