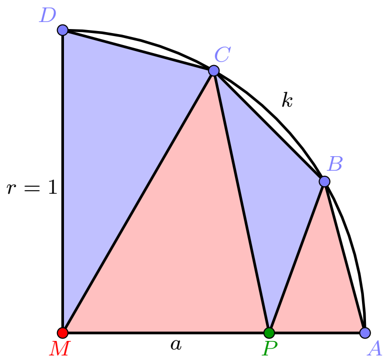
Gerechte Flächenteilung im Fünfeck

Die Punkte $A(1|0)$, B, C und $D(0|1)$ liegen auf einem Vierteleinheitskreisbogen k um den Mittelpunkt M.

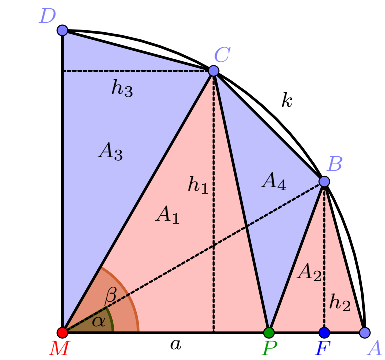
a) Wie lang ist die Strecke $a = \overline{MP}$, damit in dem Fünfeck $MABCD$ die Summe der beiden blauen und roten Flächeninhalte gleich ist?

b) Bei welchem Wert von a werden dann die Flächeninhalte beider blauer Flächen maximal?



Aufgabe von Andreas Grieser, Greifswald, vom 24. April 2021

Lösung



a) Der Mittelpunkt M des Kreisbogens wird in den Koordinatenursprung gelegt.
Die Punkte P, B, und C haben die Koordinaten $P\,(a|0)$, $B\,(x_B|h_2)$, $C\,(x_C|h_1)$.

Da $B, C \in k$ und $r = 1$ $\quad B\,(cos\ \alpha|sin\ \alpha)$, $\quad C\,(cos\ \beta|sin\ \beta)$.

Weiterhin ist $\quad cos\ \beta = cos\,(90° - \alpha)$, $\quad cos\ \beta = sin\ \alpha$,

und $\quad sin\ \beta = sin\,(90° - \alpha)$, $\quad sin\ \beta = cos\ \alpha$,

so dass $\quad C\,(sin\ \alpha|cos\ \alpha)$.

Damit sind die Koordinaten aller fünf Punkte bestimmt, die Flächen können berechnet werden.

Es ist $\quad A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot cos\ \alpha \quad$ ...(1),

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - a) \cdot sin\ \alpha \quad$ ...(2),

$h_3 = x_C \quad A_3 = \frac{1}{2} \cdot sin\ \alpha \quad$ ...(3),

und mit $\quad A_4 = \frac{1}{2} \cdot (x_P \cdot (y_B - y_C) + x_B \cdot (y_C - y_P) + x_C \cdot (y_P - y_B))$,

$y_P = 0 \quad A_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(a \cdot (sin\ \alpha - cos\ \alpha) + cos^2\alpha - sin^2\alpha\right) \quad$ ...(4).

Bei Flächengleichheit ist $\quad A_1 + A_2 = A_3 + A_4$,

mit (1), (2) $\quad \frac{1}{2} \cdot a \cdot cos\ \alpha + \frac{1}{2} \cdot (1 - a) \cdot sin\ \alpha$,

mit (3), (4) $\quad = \frac{1}{2} \cdot sin\ \alpha + \frac{1}{2} \cdot \left(a \cdot (sin\ \alpha - cos\ \alpha) + cos^2\alpha - sin^2\alpha\right)$,

$|\cdot 2 \quad a \cdot cos\ \alpha + sin\ \alpha - a \cdot sin\ \alpha = sin\ \alpha + a \cdot sin\ \alpha - a \cdot cos\ \alpha + cos^2\alpha - sin^2\alpha$

$2 \cdot a \cdot cos\ \alpha - 2 \cdot a \cdot sin\ \alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$,

$a = \frac{\cancel{(cos\ \alpha - sin\ \alpha)} \cdot (cos\ \alpha + sin\ \alpha)}{2 \cdot \cancel{(cos\ \alpha - sin\ \alpha)}}$, $\quad \underline{\underline{a = \frac{1}{2} \cdot (cos\ \alpha + sin\ \alpha)}} \quad$ ...(5).

Wenn $0° < \alpha < 45°$, so haben mit $a = \frac{1}{2} \cdot (cos\ \alpha + sin\ \alpha)$ die blauen und roten Flächen gleiche Inhalte.

b) notwendige Bedingung: $(A_1 + A_2)'(\alpha) = 0$,

$(A_1 + A_2)(\alpha, a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot cos\ \alpha + \frac{1}{2} \cdot (1 - a) \cdot sin\ \alpha$,

mit (5) $(A_1 + A_2)(\alpha) = \frac{1}{4} \cdot (cos\ \alpha + sin\ \alpha) \cdot cos\ \alpha + \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot (cos\ \alpha + sin\ \alpha)) \cdot sin\ \alpha$,

$(A_1 + A_2)(\alpha) = \frac{1}{4} \cdot cos^2\alpha + \frac{1}{4} \cdot sin\ \alpha \cdot cos\ \alpha + \frac{1}{2} \cdot sin\ \alpha - \frac{1}{4} \cdot sin\ \alpha \cdot cos\ \alpha - \frac{1}{4} \cdot sin^2\alpha$,

$(A_1 + A_2)(\alpha) = \frac{1}{4} \cdot cos^2\alpha + \frac{1}{2} \cdot sin\ \alpha - \frac{1}{4} \cdot sin^2\alpha$,

$(A_1 + A_2)'(\alpha) = -\frac{1}{2} \cdot cos\ \alpha \cdot sin\ \alpha + \frac{1}{2} \cdot cos\ \alpha - \frac{1}{2} \cdot sin\ \alpha \cdot cos\ \alpha$,

$(A_1 + A_2)'(\alpha) = -\cos\ \alpha \cdot sin\ \alpha + \frac{1}{2} \cdot cos\ \alpha$,

$0 = -cos\ \alpha \cdot sin\ \alpha + \frac{1}{2} \cdot cos\ \alpha$, $\quad sin\ \alpha = \frac{1}{2}$, $\quad \underline{\underline{\alpha_E = 30°}}$.

hinreichende Bedingung: $(A_1 + A_2)''(\alpha_E) \neq 0$,

$(A_1 + A_2)''(\alpha) = \sin^2\alpha - cos^2\alpha - \frac{1}{2} \cdot sin\ \alpha$,

$(A_1 + A_2)''(30°) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$, $\quad (A_1 + A_2)''(30°) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow Max.$

Wenn $\alpha = 30°$, haben die beiden blauen und roten Flächen ihren maximalen Inhalt. Der Wert von a ist $a = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$, $\quad \underline{\underline{a = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)}}$.

Die einzelnen Flächen haben einen Inhalt von

mit (1) $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$, $\quad \underline{\underline{A_1 = \frac{1}{16} \cdot (3 + \sqrt{3})}}$,

mit (2) $A_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)) \cdot \frac{1}{2}$, $\quad A_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}\right)$,

$\underline{\underline{A_2 = \frac{1}{16} \cdot \left(3 - \sqrt{3}\right)}}$,

mit (3) $A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, $\quad \underline{\underline{A_3 = \frac{1}{4}}}$,

mit (4) $A_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}) + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)$,

$A_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{3}) + \frac{1}{2}\right)$,

$A_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot (1 - 3) + \frac{1}{2}\right)$, $\quad A_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{8} + \frac{1}{2}\right)$,

$A_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$, $\quad \underline{\underline{A_4 = \frac{1}{8}}}$.

Probe: $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$, $\quad \frac{1}{16} \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right) + \frac{1}{16} \cdot \left(3 - \sqrt{3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$,

$\frac{1}{16} \cdot (3 + 3) = \frac{3}{8}$, $\quad \underline{\underline{\frac{3}{8} = \frac{3}{8}}}$ w.A.

Bei einem Wert von $a = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)\ LE$ erreichen die blauen und roten Flächen einen maximalen Gesamtinhalt von jeweils $A = \frac{3}{8}\ FE$.