Glatteis

Der sportliche Höhepunkt des letzten Jahres war sicherlich der Iron Gnome 2021, der traditionelle alljährliche Eisenwichtel-Wettkampf. Im neunten Teilwettbewerb des Iron Gnome musste Knecht Ruprecht quer durch ein Schneefeld von A nach B laufen. Abbildung 1 zeigt uns die beiden Punkte A und B im Schneefeld zusammen mit einer spiegelglatten blauen Eisfläche in der linken unteren Ecke, die sich hunderte Kilometer weit nach Süden und nach Westen erstreckte. Der Nordrand und der Ostrand der Eisfläche bilden jeweils eine schnurgerade Linie.

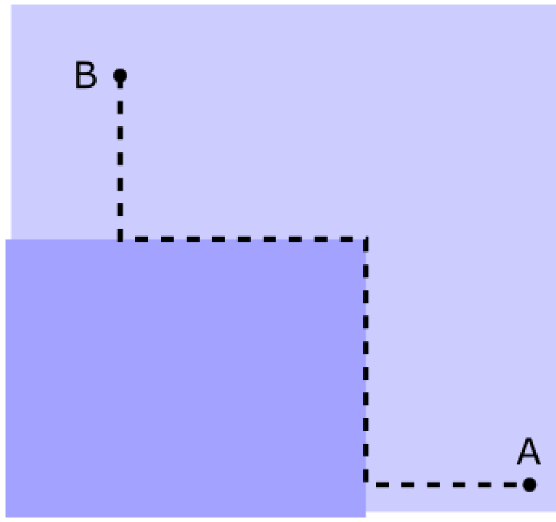


Abbildung 1: Das zu durchquerende Schneefeld, die spiegelglatte Eisfläche und ein möglicher Weg von A nach B.

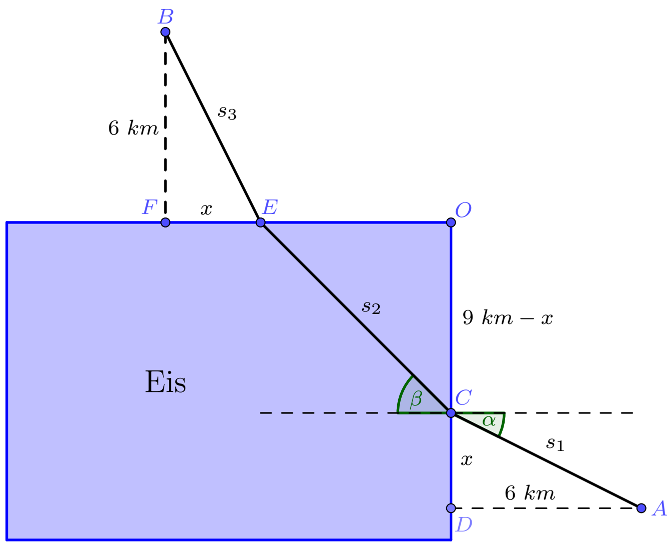
Abbildung 1 zeigt außerdem einen möglichen Weg, den Ruprecht von A nach B nehmen kann. Der Weg geht von A zunächst 6 km geradeaus nach Westen, bis er den Ostrand der Eisfläche erreicht, danach 9 km den Ostrand entlang nach Norden, danach 9 km den Nordrand entlang nach Westen und schlussendlich 6 km geradeaus nach Norden bis zum Punkt B.

Auf der Eisfläche schlittert Ruprecht mit $10\,\frac{km}{h}$ dahin, während er beim mühsamen Laufen durch das Schneefeld nur $\sqrt{40}\,\frac{km}{h}$ schafft.

Wie viel Zeit benötigt Ruprecht für den schnellstmöglichen Weg von A nach B?

Aufgabe Nr.12 aus dem Weihnachtskalender 2021 von Cor Hurkens (TU Eindhoven)

Lösung



Der Koordinatenursprung sei O. Wegen der Symmetrie der Strecken $\overline{OD} = \overline{OF}$ und $\overline{AD} = \overline{BF}$ wird davon ausgegangen, dass die Dreiecke ΔDAC und ΔFEB kongruent sind. Dann ist $s_1 = s_3$. Das Dreieck ΔCOE ist gleichschenklig rechtwinklig. Die Geschwindigkeit des Ruprechts im Schnee sei v_S und auf dem Eis v_E. Die Zeit, um von A nach B zu gelangen, wird berechnet mit der Gleichung

$$t = \frac{s_1}{v_S} + \frac{s_2}{v_E} + \frac{s_3}{v_S}, \qquad t = 2 \cdot \frac{s_1}{v_S} + \frac{s_2}{v_E},$$

$$t = 2 \cdot \frac{\sqrt{x^2+(6\ km)^2}}{v_S} + \frac{\sqrt{2 \cdot (9\ km - x)^2}}{v_E}, \qquad t = \frac{2 \cdot \sqrt{x^2+(6\ km)^2}}{v_S} + \frac{\sqrt{2} \cdot (9\ km - x)}{v_E},$$

$$t = \frac{2 \cdot \sqrt{x^2+(6\ km)^2}}{\sqrt{40}\frac{km}{h}} + \frac{\sqrt{2} \cdot (9\ km - x)}{10\ \frac{km}{h}},$$

$$t(x) = \frac{2}{\sqrt{40}} \frac{h}{km} \cdot \sqrt{x^2 + (6\ km)^2} + \frac{\sqrt{2}}{10} \frac{h}{km} \cdot (9\ km - x) \qquad ...(1),$$

notw. Bed. $t'(x) = 0$

$$t'(x) = \frac{2}{\sqrt{40}} \frac{h}{km} \cdot \frac{2 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{x^2+(6\ km)^2}} - \frac{\sqrt{2}}{10} \frac{h}{km}, \qquad 0 = \frac{2}{\sqrt{40}} \frac{h}{km} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+(6\ km)^2}} - \frac{\sqrt{2}}{10} \frac{h}{km},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{10} \frac{h}{km} = \frac{2}{\sqrt{40}} \frac{h}{km} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+(6\ km)^2}}, \qquad \sqrt{2} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{x^2 + (6\ km)^2} = 2 \cdot 10 \cdot x$$

$|\ ^2$

$$80 \cdot (x^2 + 36\ km^2) = (20 \cdot x)^2, \qquad 320 \cdot x^2 = 80 \cdot 36\ km^2,$$

$$x^2 = \frac{36}{4}\ km^2 \qquad x_E = |3\ km|.$$

hinr. Bed. $t''(x_E) \neq 0$

$$t''(x) = \frac{2}{\sqrt{40}} \frac{h}{km} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+(6\ km)^2} - \frac{x \cdot x}{\sqrt{x^2+(6\ km)^2}}}{x^2+(6\ km)^2},$$

$$t''(x_E) = \frac{2}{\sqrt{40}} \frac{h}{km} \cdot \frac{\sqrt{9\ km^2+36\ km^2} - \frac{9\ km^2}{\sqrt{9\ km^2+36\ km^2}}}{9\ km^2+36\ km^2},$$

$$t''(x_E) = \frac{2}{\sqrt{40}} \frac{h}{km} \cdot \frac{\sqrt{45}\,km - \frac{9}{\sqrt{45}}\,km}{45\ km^2}, \qquad t''(x_E) = \frac{2}{\sqrt{40}} \frac{h}{km} \cdot \frac{\sqrt{45} - \frac{9}{\sqrt{45}}}{45\ km},$$

$$t''(x_E) = \frac{2}{\sqrt{40}} \frac{h}{km^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{45}} - \frac{1}{5 \cdot \sqrt{45}}\right), \qquad t''(x_E) = \frac{2}{\sqrt{40}} \frac{h}{km^2} \cdot \frac{4}{5 \cdot \sqrt{45}},$$

$$t''(x_E) = \frac{8}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot 15 \cdot \sqrt{5}} \cdot \frac{h}{km^2}, \qquad t''(x_E) = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{75} \cdot \frac{h}{km^2} > 0,$$

$\Rightarrow t$ wird ein Minumum.

Probe mit dem snelliusschen Brechungsgesetz: Wenn der Winkel $\beta = 45°$, dann gilt:

$$\frac{\sin\ \alpha}{\sin\ \beta} = \frac{v_S}{v_E}, \qquad \sin\ \alpha = \frac{\sqrt{40}\frac{km}{h}}{10\ \frac{km}{h}} \cdot \sin\ 45°,$$

$$\sin\ \alpha = \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}, \qquad \alpha = \arcsin\sqrt{\frac{1}{5}},$$

$$\alpha = 26{,}565°.$$

Im Dreieck ΔDAC gilt

$$\tan\ \alpha = \frac{3\ km}{6\ km}, \qquad \alpha = \arctan\ \frac{1}{2},$$

$$\alpha = 26{,}565° \quad \text{w.A.}$$

x_E in (1)

$$t(x) = \frac{2}{\sqrt{40}} \frac{h}{km} \cdot \sqrt{9\,km^2 + (6\ km)^2} + \frac{\sqrt{2}}{10} \frac{h}{km} \cdot (9\ km - 3\,km),$$

$$t(x) = \frac{2}{\sqrt{40}} \frac{h}{km} \cdot \sqrt{45}\,km + \frac{\sqrt{2}}{10} \frac{h}{km} \cdot 6\ km,$$

$$t(x) = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{10}} \cdot 3 \cdot \sqrt{5}\,h + \frac{3}{5} \cdot \sqrt{2}\,h, \qquad t(x) = \left(3 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{3}{5} \cdot \sqrt{2}\right) h,$$

$$t(x) = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) h, \qquad t(x) = \frac{21}{10} \cdot \sqrt{2}\,h,$$

$$\underline{\underline{t(x) = 178{,}191\ min.}}$$

Der schnellste Weg von A nach B dauert für Knecht Ruprecht rund $t = 178{,}2$ Minuten.