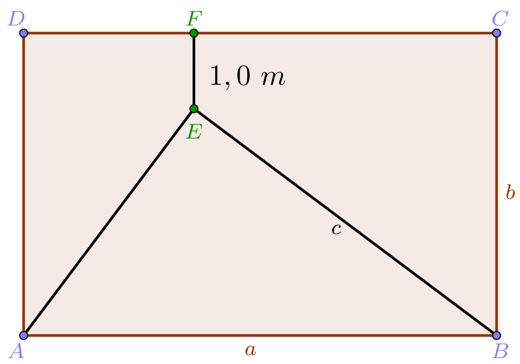
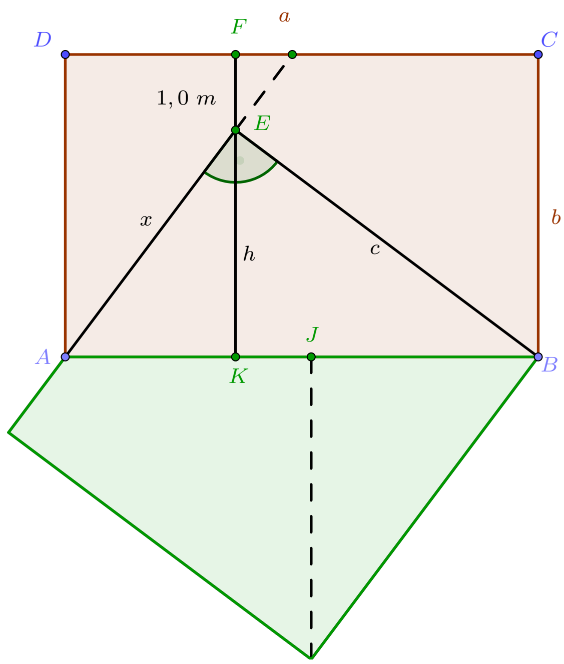
Gleiche Fläche von Rechteck und Quadrat

Ein Rechteck hat die Seitenlängen a und b. Der Punkt E liegt genau $1,0\ m$ unter der Strecke $\overline{CD}$. Dabei sei $\overline{EF} \perp \overline{CD}$ und $\overline{AE} \perp \overline{BE}$.
Welche ganzzahligen Seitenlängen b kann das Rechteck haben, wenn die Seitenlängen eines dem Rechteck flächengleichen Quadrates über den Seiten c auch ganzzahlig sind?



Idee der Aufgabe nach „Der Teppichboden", Aufgabe No.57 aus der Rätselsammlung
„Euklids Wohnzimmer" von Heinrich Hemme



Lösung

Das Dreieck ΔABE ist rechtwinklig. Es gelten die Beziehungen

	$a^2 = x^2 + c^2,$		...(1),
	$x^2 = a \cdot x_E,$		...(2).
Im Dreieck ΔAKE ist	$x^2 = x_E^2 + h^2,$	$x^2 = x_E^2 + (b-1)^2,$	...(3).
(2)=(3)	$a \cdot x_E = x_E^2 + (b-1)^2,$	$0 = x_E^2 - a \cdot x_E + (b-1)^2,$	
positive Lösung entfällt	$x_E = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^4}{4} - (b-1)^2}$		...(4).
Mit (1), (3) ist	$a^2 = x_E^2 + (b-1)^2 + c^2,$		

und (4) $a^2 = \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^4}{4} - (b-1)^2}\right)^2 + (b-1)^2 + c^2,$

$a^2 - (b-1)^2 - c^2 = \frac{a^2}{4} - a \cdot \sqrt{\frac{a^4}{4} - (b-1)^2} + \frac{a^4}{4} - (b-1)^2,$

$\frac{a^2}{2} - c^2 = -a \cdot \sqrt{\frac{a^4}{4} - (b-1)^2},$

mit $c^2 = a \cdot b$ nach Voraus. $\frac{a^2}{2} - ab = -a \cdot \sqrt{\frac{a^4}{4} - (b-1)^2},$ $\frac{a}{2} - b = -\sqrt{\frac{a^4}{4} - (b-1)^2}$

quadriert $\frac{a^2}{4} - ab + b^2 = \frac{a^4}{4} - (b-1)^2,$ $2 \cdot b^2 - 2 \cdot b - ab + 1 = 0,$

mit $c^2 = a \cdot b$ $b^2 - b - \frac{c^2}{2} + \frac{1}{2} = 0,$ $b_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{c^2}{2} - \frac{1}{2}},$

negative Lösung entfällt $b = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2 \cdot c^2}{4} - \frac{1}{4}},$ $b = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{2 \cdot c^2 - 1}\right).$

Die Seite b wird nur dann ganzzahlig, wenn $2 \cdot c^2 - 1$ eine ungerade Quadratzahl ist.
Dann ist mit $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ $2 \cdot c^2 - 1 = (2 \cdot n - 1)^2,$ $c^2 = 2 \cdot n \cdot (n-1) + 1.$

Das kleine Python-Programm liefert für die ersten 50000 ungeraden Zahlen sieben ganzzahlige Wertepaare der Seiten b und c. Das Durchlaufen der Schleifen dauert ungefähr eine Viertelstunde.

```
z = 50000
for i in range(1,z):
    liste1 = round(2*i*(i-1)+1)
    for j in range(1,z):
        liste2 = j**2
        if liste1==liste2:
            b = round(((1 + (2 * j **2 - 1) **0.5))/2)
            a = j **2/b
            print("Seite c =",j,"m, Seite b =",b,"m, Seite a =",a,"m")
```

Ingmar Rubin, Berlin, hat das Programm wunderbar vereinfacht, das für die ersten 900000 ungeraden Zahlen schon nach 1,5 Sekunden zwei weitere Lösungen findet.

```
z = 900000
for i in range(1,z):
    j = 2*i*(i-1) + 1
    if math.sqrt(j) % 1 == 0:
        b = round((1 + math.sqrt(2 * j - 1))/2)
        a = j/b
        print("Seite c =",j,"m, Seite b =",b,"m, Seite a =",a,"m")
```

Nr.	c in m	$b = n$ in m	a in m
1	1	1	1
2	5	4	6,25
3	29	21	40,04762
4	169	120	238,00833
5	985	697	1392,00143
6	5741	4060	8118,00025
7	33461	23661	47320,00004
8	195025	137904	275806,00001
9	1136689	803761	1607520,000001