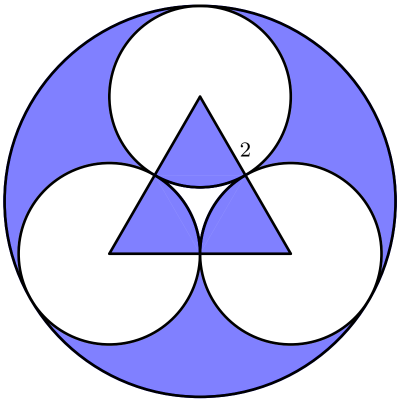
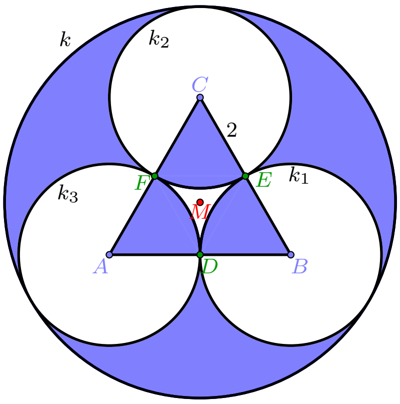
Gleichseitiges Dreieck und drei Kreise im Kreis

Welchen Flächeninhalt besitzt die blaue Fläche?



Aufgabe von Presh Tawalkar aus „Mind Your Decisions“ bei `https://www.youtube.com/watch?v=t3Dib1etTL4` vom 11. Mai 2022

Lösung



Der Mittelpunkt M des Kreises k mit dem Radius R wird in den Koordinatenursprung gelegt. Er ist der Schwerpunkt des Dreiecks ΔABC. Das Dreieck ΔABC hat die Seitenlänge $a = 4$, sein Flächeninhalt ist $A_D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$. Die Strecke $\overline{DC}$ ist die Höhe h des Dreiecks ΔABC, wobei $\overline{MC} = \frac{2}{3} \cdot h$. Die Kreise k_1, k_2 und k_3 haben einen Radius von jeweils $r = 2$. Die Fläche der drei Kreissektoren im Dreieck ΔABC

ist mit $r = 2$	$A_{KS} = 3 \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{6}$,	$A_{KS} = 2 \cdot \pi$	...(1).
Der Radius R von k ist	$R = \frac{2}{3} \cdot h + r$,	$R = \frac{2}{3} \cdot h + 2$,	
$h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a$	$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4 + 2$,	$R = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} + 2$	...(2).
Die blaue Fläche ist dann	$A_{blau} = \pi \cdot R^2 - 3 \cdot \pi \cdot r^2 - (A_D - A_{KS}) + A_S$,		
	$A_{blau} = \pi \cdot R^2 - 3 \cdot \pi \cdot r^2 - A_D + 2 \cdot A_{KS}$,		
mit (1), (2)	$A_{blau} = \pi \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} + 2\right)^2 - 3 \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot \pi$,		
	$A_{blau} = \pi \cdot \left(\frac{16}{3} + \frac{16}{3} \cdot \sqrt{3} + 4\right) - 12 \cdot \pi - 4 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot \pi$,		
	$A_{blau} = \frac{16}{3} \cdot \pi + \frac{16}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \pi + 4 \cdot \pi - 12 \cdot \pi - 4 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot \pi$,		
	$A_{blau} = \frac{16}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \pi + \frac{4}{3} \cdot \pi - 4 \cdot \sqrt{3}$,		
	$\underline{\underline{A_{blau} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(4 \cdot \sqrt{3} + 1\right) - 4 \cdot \sqrt{3}}}$.		

Die blaue Fläche hat einen Flächeninhalt von $A_{blau} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(4 \cdot \sqrt{3} + 1\right) - 4 \cdot \sqrt{3}\ FE$.